UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
PROGRAMA DE EDUCAÇÃO TUTORIAL - MATEMÁTICA
PROJETO FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA ELEMENTAR

Aula: Plano Cartesiano, Vetores no plano e no espaço
Professor: Eneas Mendes de Jesus

O que é Geometria Analítica?

A Geometria Analítica baseia-se na idéia de representar os pontos da reta por números reais, os pontos do plano por pares ordenados e os pontos do espaço por ternos ordenados de números reais, é a interconexão entre a Geometria e Álgebra.

Coodenadas na reta

Uma reta diz-se orientada quando sobre ela se escolheu um sentido de percurso, chamado positivo; o sentido inverso chama-se negativo.

Um *eixo* é uma reta orientada na qual se fixou um ponto O, chamado origem.

Todo eixo pode ser posto em correspondência biunívoca com o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais. Cada ponto X da reta corresponde à um numero real x, que é chamado de *coordenada do ponto X*.

Distância entre dois pontos na reta

Sendo x a coordenada de um ponto X e y a coordenada de um ponto Y, na reta, temos que a distância de X à Y é dada por:

$$d\,(X,\,Y) = |x - y| = |y - x|$$

Ex: Dados $X = 9$ e $Y = 4$, temos

$$\begin{aligned} d\,(X,\,Y) &= |9-4| = |4-9| \\ d\,(X,\,Y) &= 5 \end{aligned}$$

No caso particular em que $Y = 0$, temos que $d\,(X,\,Y) = |x - 0| = |0 - x|$ é a coordenada de X, ou seja $d\,(X,0) = x$.

Coordenadas no Plano

Um sistema de eixos ortogonais num plano é um par de eixos OX e OY que são perpendiculares e têm a mesma origem O.

O plano munido de um sistema de eixos ortogonais põe-se, de modo natural, em correspondência biunívoca com $\mathbb{R}^2$. Assim cada ponto do plano faz-se corresponder o par ordenado $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Indica-se por $\mathbb{R}^2$ o conjunto formado pelos pares ordenados (x, y) , onde x e y são números reais. Os números x e y chamam-se *coordenadas* (cartesianas) de um ponto P, onde x é a abscissa e y é a ordenada de P.

Distância entre dois pontos no plano

Sendo (x_1, y_1) as coordenadas de um ponto P_1 e (x_2, y_2) a coordenada de um ponto P_2, no plano, temos que a distância de P_1 à P_2 é dada por:

$$d\,(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Ex:
Sejam $A = (1, 6)$ e $B = (5, 9)$. Determine a distância de A até B.

$$\begin{aligned} d(A, B) &= \sqrt{(1-5)^2 + (6-9)^2} \\ d(A, B) &= \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} \\ d(A, B) &= \sqrt{16+9} \\ d(A, B) &= \sqrt{25} \\ d(A, B) &= 5 \end{aligned}$$

Assim a distância de A até B é 5.

Vale a pena lembrar que um segmento de reta, não horizontal e não vertical, formado pela ligação de dois pontos, no plano, deve sempre ser visto como a hipotenusa de um triangulo retângulo, onde os catetos são as distâncias entre as coordenadas correspondentes.

Coordenadas no Espaço

Um *sistema de eixos ortogonais* OXYZ no espaço, consiste em três eixos OX, OY e OZ, com a mesma origem O, tais que dois quaisquer deles são perpendiculares. Um sistema de eixos ortogonais OXYZ no espaço determina de modo natural, uma correspondência biunívoca entre o espaço euclidiano e $\mathbb{R}^3$.Assim cada ponto do espaço faz-se corresponder o terno ordenado $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Indica-se por $\mathbb{R}^3$ o conjunto formado pelos ternos ordenados (x, y, z) , onde x, y e z são números reais. Os números x, y e z chamam-se *coordenadas* de um ponto P do espaço.

Distância entre dois pontos no espaço

Sendo (x_1, y_1, z_1) as coordenadas de um ponto P_1 e (x_2, y_2, z_2) a coordenada de um ponto P_2 no espaço, temos que a distância de P_1 à P_2 é dada por:

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

Ex:
Dados os pontos $A = (1, 3, 5)$ e $B = (3, 4, 7)$, ache a distancia entre A e B.

$$\begin{aligned} d(A, B) &= \sqrt{(1-3)^2 + (3-4)^2 + (5-7)^2} \\ d(A, B) &= \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + (-2)^2} \\ d(A, B) &= \sqrt{4+1+4} \\ d(A, B) &= \sqrt{9} \\ d(A, B) &= 3 \end{aligned}$$

Vetores

Os vetores do plano serão definidos como classes de equipolência de segmentos orientados.

Diz-se que os segmentos de retas AB e CD são *equipolentes*, e escreve-se $AB \equiv CD$, quando eles:
1. têm ao mesmo comprimento ;
2. são paralelos ou colineares;
3. têm o mesmo sentido.

A relação de equipolência $AB \equiv CD$ possui as sequintes propriedades:
Reflexiva;
$AB \equiv BA$.
Simétrica;
Se $AB \equiv CD$ então $CD \equiv AB$.
Transitiva;
Se $AB \equiv CD$ e $CD \equiv EF$ então $AB \equiv EF$.

Quando os segmentos de reta orientados AB e CD são equipolentes, diz-se que eles representam o mesmo vetor v. Escreve-se então $v = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.
Um ponto do plano representa o vetor nulo, ou vetor zero.

Obs: a equipolência $AB \equiv CD$ é o mesmo que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Coordenadas de um vetor

Dados $A = (x, y)$ e $B = (x', y')$, os números $\alpha = x' - x$ e $\beta = y' - y$ chamam-se coordenadas do vetor $v = \overrightarrow{AB}$

Ex:

Se $A = (40, 3)$ e $B = (20, -7)$ então as coordenadas do vetor $v = \overrightarrow{AB}$ é:

$\alpha = 40 - 20 = 20$

$\beta = 3 - (-7) = 10$

Portanto, $v = (20, 10)$

Soma de dois vetores e o produto de um número real (escalar) por um vetor

Sejam $u = \overrightarrow{AB}$ e $v = \overrightarrow{CD}$ vetores dados.

Se $u = (\alpha, \beta)$ e $v = (\alpha', \beta')$ são dados por suas coordenadas, então:

$$u + v = (\alpha + \alpha', \beta + \beta')$$

Dados o número real λ e o vetor $v = \overrightarrow{AB}$, o ***produto*** $\lambda v = \lambda\overrightarrow{AB}$ é, por definição, o vetor representado pelo segmento de reta orientado AB', colinear com AB, com $d\,(A, B') = |\lambda| d\,(A, B)$

Se $u = (\alpha, \beta)$ então

$$\lambda v = (\lambda\alpha, \lambda\beta)$$

.

Vetor simétrico

Dado $v = \overrightarrow{AB}$, o vetor $-v = \overrightarrow{BA}$ é chamado simétrico ou oposto de v. Se $v = (\alpha, \beta)$ então $-v = (-\alpha, -\beta)$, pois $-v = -1v$.

Vetor múltiplo

Um vetor v é múltiplo de outro vetor u quando $v = ku$, onde $k \in \mathbb{R}$.

Tomando $k = 0$, temos que o vetor 0 (zero) é multiplo de qualquer outro, pois $0 = 0w$, onde w é um vetor qualquer.

Ex:

Considere os vetores $v = (5, -1)$ e $u = (-3, 4)$ e $\lambda = \sqrt{2}$ número real. Determine:

$a)v + u$;

$b)\lambda v$;

$c)-v$ e $-u$;

$d)$se v e múltiplo de u.

$a)$

$$\begin{aligned} v + u &= (5 + (-3), (-1) + 4) \\ &= (2, 3). \end{aligned}$$

$b)$

$$\begin{aligned} \lambda v &= \sqrt{2}(5, -1) \\ &= (5\sqrt{2}, -\sqrt{2}). \end{aligned}$$

$c)$

$$\begin{aligned} v &= (-5, 1) \\ u &= (3, -4). \end{aligned}$$

$d)$Se v é múltiplo de u então existe um λ, tal que $v = \lambda u$. Assim $(5, -1) = \lambda(-3, 4)$, logo $5 = \lambda(-3) \Longrightarrow \lambda = (-5/3)$ e $(-1) = \lambda 4 \Longrightarrow \lambda = (-1/4)$,concluimos então que $\lambda = (-5/3)$ e $\lambda = (-1/4)$, absurdo. Logo v não é múltiplo de u.

Vetores no espaço

A fim de mantermos as boas propriedades da soma de vetores, multiplicação de um vetor por um escalar, que vimos no plano, estendemo-as agora para o espaço.
Já sabemos que há uma correspodência biunívoca entre o espaço e $\mathbb{R}^3$. Sendo assim, dados dois pontos $A = (x, y, z)$, $B = (x', y', z')$ o vetor $v = \overrightarrow{AB}$, no espaço, tem as seguintes coordenadas $\alpha = x' - x$, $\beta = y' - y$ e $\gamma = z' - z$.

Soma de dois vetores e o produto de um número real (escalar) por um vetor

Sejam $u = \overrightarrow{AB}$ e $v = \overrightarrow{CD}$ vetores dados.

Assim,

$$u + v = (\alpha + \alpha', \beta + \beta', \gamma + \gamma')$$

Definiremos agora a *multiplicação* de um vetor v por um número real α.
Seja $v = \overrightarrow{AB}$, com $v = (x, y, z)$.
Se $\alpha = 0$ ou $v = 0$, poremos $\alpha * v = 0$ (vetor nulo).
Se $\alpha \neq 0$, então definiremos:

$$\alpha * v = (\alpha * x, \alpha * y, \alpha * z)$$

Vetor simétrico

Dado $v = \overrightarrow{AB}$, o vetor $-v = \overrightarrow{BA}$ é chamado simétrico ou oposto de v. Se $v = (\alpha, \beta, \gamma)$ então $-v = (-\alpha, -\beta, -\gamma)$, pois $-v = -1 * v$.

Vetor múltiplo

Um vetor v é múltiplo de outro vetor u quando $v = k * u$, onde $k \in \mathbb{R}$.

Tomando $k = 0$, temos que o vetor 0 (zero) é multiplo de qualquer outro, pois $0 = 0 * w$, onde w é um vetor qualquer.