UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
PROGRAMA DE EDUCAÇÃO TUTORIAL - MATEMÁTICA
PROJETO FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA ELEMENTAR

Assuntos: Completamento de quadrados, Função e Equação quadrática, Função Inversa.

Professor: Marcus Vinicius Casoto Zeferino

1 Completando Quadrados

Sabemos desde o ensino fundamental que :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Somos habituados a sempre olharmos essas igualdades da esquerda para a direita, e não percebemos o quão útil podem ser para a resolução de uma equação quadrática olhar a igualdade da esquerda para a direita. Vejamos um exemplo:
Resolver a equação

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

Se somarmos 1 aos dois lados da igualdade, teremos:

$$x^2 + 2x + 1 - 3 = 1$$

note que termos um produto notável no primeiro termo. Assim podemos escrever a igualdade como:

$$(x+1)^2 = 4$$

Apesar de representarem a mesma igualdade, esta última visualmente aparenta ser mais fácil para se resolver. Este método que fizemos é o que chamamos de $completarquadrado$ em uma quação quadrática. Vamos generalizar o método:
Se temos

$$x^2 + mx + n = 0$$

queremos que o termo mx seja duas vezes o primeiro termo vezes o segundo, para trasformar num quadrado. Então tomamos como o primeiro termo, x. Temos que o segundo será $\frac{m}{2}$. Com isso, tomamos seu quadrado e somamos a fórmula, e tomamos também sua diferença, assim a expressão fica:

$$x^2 + mx + \frac{m^2}{4} - \frac{m^2}{4} + n = 0$$

Assim podemos simplificar como:

$$(x + \frac{m}{2})^2 = \frac{m^2}{4} - n$$

para o caso de $\frac{m^2}{4} - n \geq 0$ a equação possui raízes reais e pode ser resolvida facilmente.
Caso tenhamos a equação $x^2 - mx + n = 0$, completando quadrados chegamos a $(x - \frac{m}{2})^2 = \frac{m^2}{4} - n$ (faça as contas e chegue essa conclusão realmente)
Para fixar um pouco este método, complete quadrados nas expressoes abaixo.

- $x^2 - 10x + 25 = 0$
- $x^2 - 5x + 6 = 0$
- $x^2 - 8x + 12 = 0$
- $x^2 + 2x - 8 = 0$
- $x^2 - 5x + 8 = 0$
- $2x^2 - 8x + 8 = 0$

- $x^2 - 4x - 5 = 0$
- $x^2 + x + 12 = 0$
- $x^2 + 6x - 5 = 0$
- $4x^2 - 12x + 9 = 0$

2 Equações Quadráticas

Uma equação quadrática é uma equação da forma :

$ax^2 + bx + c = 0$

onde $a \neq 0$
Para resolver essa equação. Colocando o termo "a"em evidencia temos

$$a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}) = 0$$

Se o produto de dois numeros e zero, isso indica que algum dos dois números é zero. Mas numa fnção quadratica temos $a \neq 0$ assim,

$$(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}) = 0$$

Completando quadrados,

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$$

e assim

$$(x - \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2 - 4ac}{2a}$$

Extraindo a raíz quadrada nos dois lados da igualdade e fazendo algumas continhas temos

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ou

$$x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

O termo

$$b^2 - 4ac$$

é chamado de discriminante da equação quadrática, que chamado de *delta* e representado por Δ.

Se $\Delta > 0$ então a equação apresenta duas raíses reais distintas. Caso $\Delta = 0$ a equação possuí apenas uma raiz (a saber $\frac{-b}{2a}$). Mas como uma equação quadrática tem duas raízes, dizemos que a equação tem duas raízes iguais.
E se $\Delta < 0$, a equação não possui raízes reais.
A respeito das raízes, conseguimos estabelecer algumas relações entre elas.
Sejam

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

e

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Com pequenas e divertidas manipulações algébricas chegamos a

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$$
$$x_1 . x_2 = \frac{c}{a}$$

Essas relações podem parecer inocentes mas muitas vezes permite resolver uma equação quadratica sem fazer contas! Para mostrar um pouco do "poder" dessas relações, deixaremos um probleminha retirado da Olímpiada Brasileira de Matématica.

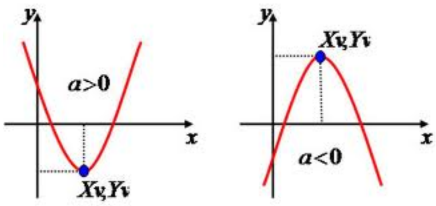
- a, b, c, d são números reais distintos tais que a e b são as raízes da equação $x^2 - 3cx - 8d = 0$, e c e d são as raízes da equação $x^2 - 3ax - 8b = 0$. Calcule a soma $a + b + c + d$.

Dica: Use as relações entre as somas das raízes, procure um sistema de equação e não tenha medo de fazer contas.

3 Funções Quadráticas

Uma função quadrática é uma aplicação $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ com
$f(x) = ax^2 + bx + c$ com $a \neq 0$.
No estudo de funções, é interessante construir o gráfico das mesmas. No caso da função quadrática, o gráfico tem formato de uma parábola. Não nos cabe aqui a demonstração desse fato. O que podemos dizer é que quando $a > 0$ a parábola tem *concavidade* voltada para cima, e quando $a < o$ então a parábola tem concavidade para baixo

A função quadrática pode apresentar um ponto onde o valor da função é máximo (se $a < 0$) ou mínimo (se $a > 0$) Este ponto é chamado vértice da parábola.



Uma parábola e simetrica, ou seja, para $p \neq 0$ temos $f(x_v - p) = f(x_v + p)$, onde x_v é a abcissa do vértice da parábola. Então

$$a(x_v - p)^2 + b(x_v - p) + c = a(x_v + p)^2 + b(x_v + p) + c$$
$$a(x_v)^2 - 2ax_v + ap^2 + bx_v - bp = a(x_v)^2 + 2ax_v + ap^2 + bx_v + bp$$
$$-2ax_v - bp = 2ax_v + bp$$
$$-ax_v = 2bp$$
$$x_v = \frac{-b}{2a}$$

substituindo esse valor em f(x), encontramos (faça as contas) que $y_v = \frac{-\Delta}{4a}$
Portanto o vértice da parábola é dado por V = $(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a})$

3.1 Estudo do Sinal

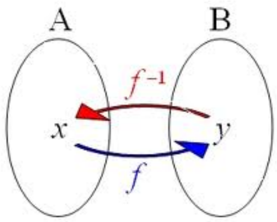
Estudar o sinal de uma função é buscar identificar para quais valores de x, os valores de f(x) são maiores, iguais ou menores que 0 .

Para isso, analisamos o sinal de a e Δ
Quando $a > 0$ e $\Delta > 0$, então a função possui concavidade para cima e duas raízes reais distintas Sejam x_1 e x_2 essas raízes com $x_1 < x_2$, então para $x < x_1$ e $x > x_2$ temos $f(x) > 0$ e para $x_1 < x < x_2, temos f(x) < 0.$
Para $a > 0$ e $\Delta = 0$, então a função possui concavidade para cima e duas raízes reais iguais. Sendo assim, exceto no ponto x_1, temos $f(x) > 0$ para todo x no domínio.
Para $a > 0$ e $\Delta < 0$, então a função possui concavidade para cima não possui raízes reais. Sendo assim, em todos os pontos do dominio temos $f(x) > 0.$
Quando $a < 0$ e $\Delta > 0$, então a função possui concavidade para baixo e duas raízes reais distintas Sejam x_1 e x_2 essas raízes com $x_1 < x_2$, então para $x < x_1$ e $x > x_2$ temos $f(x) < 0$ e para $x_1 < x < x_2, temos f(x) > 0.$
Para $a < 0$ e $\Delta = 0$, então a função possui concavidade para baixo e duas raízes reais iguais. Sendo assim, exceto no ponto x_1, temos $f(x) < 0$ para todo x no domínio.
Para $a < 0$ e $\Delta < 0$, então a função possui concavidade para baixo não possui raízes reais. Sendo assim, em todos os pontos do dominio temos $f(x) < 0.$
Os seis casos a seguir ficam mais facéis de serem analisados quando desenhamos uma parábola, assim para cada um deles, faça o desenho da parabola e faça as conclusós acima mas agora analisando o gráfico.

4 Funções Inversas

Faremos um comentário muito breve (e superficial) sobre funções inversas. Nosso objetivo aqui, é oferecer um suporte para algumas aulas que virão a seguir.
Dada uma função $f : A \longrightarrow B$, se f é bijetora , então define-se a função inversa f^{-1} como sendo a função de B em A , tal que $f^{-1}(y) = x$.
Veja a representação a seguir:

É óbvio então que:
a) para obter a função inversa , basta isolar a função x em função de y .
b) o domínio de f^{-1} é igual ao conjunto imagem de f .



c) o conjunto imagem de f^{-1} é igual ao domínio de f .
Exemplo: Determine a INVERSA da função definida por $y = 2x + 3$.
Isolamos o x obtendo $x = \frac{y-3}{2}$