UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
PROGRAMA DE EDUCAÇÃO TUTORIAL - MATEMÁTICA
PROJETO FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA ELEMENTAR

Assuntos: Matrizes; Matrizes Especiais; Operações com Matrizes; Operações Elementares com Matrizes; Sistemas de Equações Lineares; Determinantes de Matrizes.
Professor: Alexandre Silva dos Reis.

MATRIZES

Definição

Uma *matriz* A *m por n* $(m, n \in \mathbb{N})$ em $\mathbb{R}$ (ou em $\mathbb{C}$), ou simplesmente $A_{m\times n}$, é uma tabela contendo elementos reais (ou complexos) dispostos em m linhas e n colunas, que pode ser representada como

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

ou simplesmente na forma

$$A = [a_{ij}]_{m\times n}$$

onde a_{ij} é o elemento que aparece na i-ésima linha e na j-ésima coluna de A. Todas as matrizes desse texto possuirão elementos em $\mathbb{R}$.

Tipos Especiais de Matrizes

Algumas matrizes recebem nomes especiais, seja pelo fato de possuirem propriedades específicas e/ou pelo fato de aparecerem frequentemente na prática. Elas estão listadas abaixo.

Matriz Quadrada

É a matriz $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ tal que $m = n$, ou seja, $A = [a_{ij}]_{n\times n}$. Denotaremos matrizes desse tipo simplesmente por $A = [a_{ij}]_{n\times n} = A_n$. Também chamamos matrizes quadradas assim denotadas simplesmente por matriz de ordem n. Quando A é uma matriz quadrada, chamamos de *diagonal principal de* A os elementos a_{ij} tais que $i = j$.

Exemplo:

$$Q = \begin{bmatrix} \boxed{8} & -5 \\ -1 & \boxed{1} \end{bmatrix}.$$

A diagonal principal de Q é formanda pelos elementos 8 e 1.

Matriz Nula

É a matriz $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ tal que $a_{ij} = 0$, para todos i, j. Denotaremos tal matriz por $O_{m\times n}$, ou simplesmente O.

Exemplo:

$$O_{2\times 2} = O_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Matriz Linha e Matriz Coluna

São as matrizes que possuem uma única linha ($m = 1$) e uma única coluna ($n = 1$), respectivamente.

Exemplos:

$$L = \begin{bmatrix} 7 & -6 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Matriz Diagonal

É uma matriz quadrada cujos elementos fora da diagonal principal são todos nulos.

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

Observe que isso não exclui a possibilidade dos termos da diagonal principal serem nulos. Dessa forma, uma matriz nula tambem é uma matriz diagonal.

Matriz Identidade

É uma matriz diagonal onde os elementos da diagonal principal são **todos** iguais à 1. Denotaremos matriz identidade de ordem n por I_n.

Exemplos:

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Matrizes Triangulares Superior e Inferior

Uma *matriz triangular superior* é uma matriz quadrada cujos elementos abaixo da diagonal principal são todos nulos, ou seja, $a_{ij} = 0$, sempre que $i > j$. Analogamente, uma *matriz triangular inferior* é uma matriz quadrada cujos elementos acima da diagonal principal são todos nulos, ou seja, $a_{ij} = 0$, sempre que $i < j$.

Exemplos:

$$Ts = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } Ti = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & -4 & 0 \\ 1 & -6 & 7 \end{bmatrix}.$$

Matriz Transposta

Dada uma matriz $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, definimos a sua *transposta* como sendo a matriz $B = [b_{ij}]_{n\times m}$ tal que $b_{ij} = a_{ji}$, para cada par (i, j). Denotamos a matriz B transposta de A como $B = A^t$.

Exemplos:

Sendo $A = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 7 \\ 0 & 8 & 5 \\ 1 & 6 & -2 \end{bmatrix}$, então

$$A^t = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 5 & -1 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } B^t = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 8 & 6 \\ 7 & 5 & -2 \end{bmatrix}.$$

A transposição de matrizes possui certas propriedades. Sendo A e B matrizes, e pressupondo válidas as operações listadas e que serão definidas na próxima seção, temos:

1) $(A + B)^t = A^t + B^t$;

2) $(A^t)^t = A$;

3) $(k.A)^t = k.A^t$, $k \in \mathbb{R}$;

4) $(A.B)^t = B^t.A^t$ (observe a ordem!);

Matriz Simétrica e Anti Simétrica

Uma *matriz simétrica* é uma matriz quadrada A cujos elementos obedecem à regra $a_{ij} = a_{ji}$, para todos i e j. Já uma *matriz anti simétrica* é uma matriz quadrada A em que os elementos obedecem à regra $a_{ij} = -a_{ji}$, para todos i e j.

Exemplos:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 9 & 6 \end{bmatrix}$ é uma matriz simétrica e $B = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & 7 \\ -1 & -7 & 5 \end{bmatrix}$ é uma matriz anti simétrica.

Em outras palavras, uma matriz A é simétrica quando $A = A^t$. Da mesma forma, A é anti simétrica quando $A = -A^t$.

Matriz Escalonada Reduzida

É uma matriz (quadrada ou não) que possui as seguintes propriedades:

i) O primeiro elemento não nulo de cada linha é 1. Este elemento será chamado *unidade líder*;

ii) Abaixo das unidades líder, todos os elementos sao zero;

iii) Se uma matriz A possui uma linha nula, esta deve estar abaixo das linhas não nulas;

iv) Todas os elementos acima de uma unidade líder são iguais a zero;

Se uma matriz possuir apenas as três primeiras propriedades, então ela é chamada *matriz escalonada.*

Exemplos:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 8 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Veja que A e C são matrizes escalonadas reduzidas e B é uma matriz escalonada.

Operações com Matrizes

Soma

Dadas as matrizes $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ e $B = [b_{ij}]_{m\times n}$, definimos a soma $A + B$ como a matriz $C = [c_{ij}]_{m\times n}$, onde $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, ou seja

$$C = A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m\times n}.$$

Obviamente, temos que a subtração $A - B$ é definida como $D = [d_{ij}]_{m\times n}$, onde $d_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$, ou seja

$$D = A - B = [a_{ij} - b_{ij}]_{m\times n}.$$

Exemplo:

Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$, temos que

$$A + B = \begin{bmatrix} 2+0 & 3-1 \\ -1+2 & 5-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Propriedades da Soma

Dadas as matrizes A, B e C, todas de ordem $m \times n$, temos que:

i) $A + B = B + A$ (Comutatividade);

ii) $A + (B + C) = (A + B) + C$ (Associatividade);

iii) $A + O = A$ (elemento neutro); aqui, O denota a matriz $m \times n$ tal que $a_{ij} = 0$, $i = 1, ..., m$ e $j = 1, ..., n$.

iv) $A + (-A) = O$ (elemento inverso aditivo), onde $-A = (-1).A$;

Multiplicação Por Escalar

Seja $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ uma matriz e k um número real. Definimos a multiplicação de k por A como

$$k.A = [k.a_{ij}]_{m\times n}$$

Claramente, temos que $k.A = A.k$.
Exemplo:

Se $k = 3$ e $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \\ 7 & -1 \end{bmatrix}$, então $3.A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -9 & 6 \\ 21 & -3 \end{bmatrix}$.

Propriedades

Dada a matriz $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ e $k, k_1, k_2 \in \mathbb{R}$, a operação acima definida possui as seguintes propriedades:

i) $k.(A + B) = k.A + k.B$;

ii) $(k_1 + k_2).A = k_1.A + k_2.A$;

iii) $0.A = O$;

iv) $k_1.(k_2.A) = (k_1.k_2).A$;

Produto de Duas Matrizes

Dadas duas matrizes $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ e $B = [b_{ij}]_{n\times p}$ (número de colunas de A igual ao número de linhas de B), definimos o produto de A por B como sendo a matriz $C = [c_{ij}]_{m\times p}$ tal que (observe a ordem da matriz!)

$$c_{ij} = \sum_{l=1}^{n} a_{il}b_{lj}, \text{ para } i = 1, ..., m \text{ e } j = 1, ..., p.$$

Mais claramente, temos

$$A.B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix} =$$
$$\begin{bmatrix} \sum_{l=1}^{n} a_{1l}b_{l1} & \sum_{l=1}^{n} a_{1l}b_{l2} & \cdots & \sum_{l=1}^{n} a_{1l}b_{lp} \\ \sum_{l=1}^{n} a_{2l}b_{l1} & \sum_{l=1}^{n} a_{2l}b_{l2} & \cdots & \sum_{l=1}^{n} a_{2l}b_{lp} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{l=1}^{n} a_{ml}b_{l1} & \sum_{l=1}^{n} a_{ml}b_{l2} & \cdots & \sum_{l=1}^{n} a_{ml}b_{lp} \end{bmatrix}$$

Olhando dessa forma a multiplicação de matrizes parece um processo difícil e pedante. Os exemplos abaixo, contudo, mostram que não há com o que se preocupar.

Exemplo 1

Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$. O produto $A.B$ é dado então pela matriz

$$A.B = \begin{bmatrix} 2.(-1) + 3.7 & 2.5 + 3.4 \\ 1.(-1) + (-1).7 & 1.5 + (-1).4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ -8 & 1 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 2

Considere as matrizes $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ e $D = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$. Vemos que o número de colunas de C é igual ao número de linhas de D, portanto, podemos efetuar o produto $C.D$, que resulta

$$C.D = \begin{bmatrix} 2.1 + 1.0 & 2.(-1) + 1.4 \\ 4.1 + 2.0 & 4.(-1) + 2.4 \\ 5.1 + 3.0 & 5.(-1) + 3.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}.$$

Propriedades do Produto de Matrizes

Pressupondo validas as operações de soma e produto listadas, temos:

i) $A.(B.C) = (A.B).C$ (Associatividade);

ii) $(A + B).C = A.C + B.C$ (Distributividade), tambem válida para produtos à direita de $(A + B)$;

iii) $A.I = I.A$ (Elemento Neutro Multiplicativo);

iv) $k.(A.B) = (k.A).B = (A.k).B = A.(k.B) = (A.B).k$, para todo $k \in \mathbb{R}$;

Observação 1 *O produto de matrizes não é comutativo. Ou seja, em geral* $A.B \neq B.A$.

O leitor pode verificar isso utilizando como contra exemplo as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

Observação 2 *Podemos ter* $A.B = O$ *mesmo sendo* A *e* B *matrizes não nulas.*

Leitor, verifique isso utilizando as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$.

Operações Elementares em Matrizes

Chamamos de *operações elementares em uma matriz* as operações efetuadas sobre as linhas ou sobre as colunas de uma matriz. Aqui enunciaremos e utilizaremos somente as operações elementares sobre linhas de matrizes. São elas:

i) Permutação de linhas. Troca as linhas i e j de posição. $(L_i \longrightarrow L_j)$
Exemplo: $L_1 \longrightarrow L_3$

$$\begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 5 & 7 \\ -1 & 3 \\ -2 & -9 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 7 \\ 0 & 5 \\ 3 & -9 \end{bmatrix}.$$

ii) Multiplicação da i-ésima linha por um escalar não nulo λ. $(L_i \longrightarrow \lambda L_i)$
Exemplo: $L_2 \longrightarrow -2L_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 8 \\ -1 & 5 & -3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 8 \\ -2 & 10 & -6 \end{bmatrix}.$$

iii) Substituir a i-ésima linha pela i-ésima linha somada com λ vezes a j-ésima linha. $(L_i \longrightarrow L_i + \lambda L_j)$
Exemplo: $L_4 \longrightarrow L_4 - 2L_1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 7 & -1 & 6 & 3 \\ -4 & 1 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & -2 & 7 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 7 & -1 & 6 & 3 \\ -4 & 1 & 5 & 0 \\ 2 & -4 & -2 & 7 \end{bmatrix}.$$

Operações sobre colunas de uma matriz são efetuadas de modo inteiramente análogo ao enunciado acima. Vale ressaltar, porém, que iniciadas operações elementares sobre linhas, não podemos realizar operações sobre colunas, e vice-versa.

As matrizes obtidas através de operações elementares sobre outras matrizes são de fundamental importância e merecem uma definição especial.

Definição 1 *Dadas duas matrizes A e B de mesma ordem, dizemos que A e B são* ***equivalentes*** *se uma pode ser obtida da outra por um processo de operações elementares.*

Notação: $A \sim B$.

Processo de Eliminação de Gauss-Jordan

Resumidamente falando, este processo consiste em obter uma matriz escalonada reduzida A de uma outra matriz B através de operações elementares sobre esta. Esse processo tambem é chamado de *escalonamento* de matrizes.

Exemplo: Considere a matriz $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$. Escalonando-a, temos

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 \longrightarrow L_3 - L_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \longrightarrow L_2 - L_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2 \longrightarrow \frac{1}{2}L_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 \longrightarrow L_3 - 2L_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 \longrightarrow -\frac{1}{3}L_3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 \longrightarrow L_1 - L_3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \longrightarrow L_1 + L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3.$$

Como vemos, a matriz do exemplo é equivalente à matriz identidade I_3. Matrizes equivalentes a matriz identidade têm um destaque especial e um resultado importantíssimo a respeito delas é

Propriedade 1 *Matrizes equivalentes à matriz identidade são inversíveis. Isso significa que, se A é uma matriz quadrada de ordem n equivalente à matriz identidade I_n, existe uma matriz B tal que $A.B = I_n$. Neste caso, denotaremos $B = A^{-1}$.*

No caso de A não ser quadrada, podemos extender o conceito de matriz inversa. Dizemos que $A_{m\times n}$ possui *inversa à direita* se existir $B_{n\times m}$ tal que $A_{m\times n}.B_{n\times m} = I_m$. Analogamente, $A_{m\times n}$ possui *inversa à esquerda* se existir $C_{n\times m}$ tal que $C_{n\times m}.A_{m\times n} = I_n$. Uma importante propriedade é que se A possui inversas à esquerda e à direita, então *esta inversa é única*, denotada por A^{-1}. Uma matriz é chamada *matriz ortogonal* se sua transposta for igual à sua inversa, ou seja, $A^t = A^{-1}$.

SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

Definição

Um *sistema de equações lineares* com m equações e n $(m, n \in \mathbb{N})$ incógnitas em $\mathbb{R}$, ou simplesmente um *sistema linear m por n* em $\mathbb{R}$, é um conjunto de equações do tipo

$$(*) \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

com $a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$, para todos $i = 1, ..., m$ e $j = 1, ..., n$.

Uma *solução do sistema* $(*)$ é uma lista de números $(x_1, x_2, ..., x_n)$ que satizfaça as m equações simultaneamente.
Um sistema é chamado *sistema homogêneo* caso $b_i = 0$, para $i = 1, ..., m$.

Vale lembrar que já no Ensino Médio aprendemos que um sistema linear pode possuir uma única solução, infinitas soluções ou pode não possuir nenhuma solução. Obviamente, todo sistema homogêneo possui pelo menos uma solução, dada por $x_i = 0$, para $i = 1, ..., n$.
Exemplo 1: Considere o sistema

$$(1) \qquad \begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ x - y = -2 \end{cases}.$$

Claramente, este sistema admite solução $x = -\frac{3}{5}$ e $y = \frac{7}{5}$.

Exemplo 2: Considere o sistema

$$(2) \qquad \left\{ \, 2x + 3y = 4 \right. .$$

Algumas manipulações nos levam à solução dada pelo conjunto

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x = \tfrac{1}{2}(4 - 3t) \text{ e } y = t,\, t \in \mathbb{R}\}.$$

Os exemplos acima consistem em sistemas de fácil resolução, onde meras substituições ou simples manipulações algébricas bastam para chegarmos às soluções. Vamos, na próxima seção, definir um processo através do qual poderemos obter o conjunto solução de qualquer sistema linear. Antes disso, precisaremos fazer algumas considerações importantes. Primeiramente, observe que o sistema $(*)$ pode ser reescrito na forma matricial $A.X = B$, pois

$$(*)\ \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}}_{B}.$$

Dessa forma, chamaremos A de *matriz dos coeficientes* do sistema $(*)$ e B de *matriz das soluções do sistema* $(*)$.

Definiremos agora a *matriz aumentada do sistema* $(*)$ como

$$(A|B) = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right].$$

Sabemos que o sistema $(*)$ possui um conjunto solução, que pode ser vazio (sistema sem solução) ou não (sistema com solução única ou com infinitas soluções). Mas e se obtermos uma matriz equivalente a $(A|B)$? Resultados mais avançados nos garantem que o conjunto solução **não é alterado**. Ou seja, se obtermos uma matriz escalonada reduzida (ou somente escalonada) M equivalente a $(A|B)$, teremos então um novo sistema $(**)$, de mais fácil manipulação e com o mesmo conjunto solução de $(*)$. Agora, partiremos pro método de obtenção desse novo sistema.

Método de Gauss-Jordan Para a Resolução de Sistemas Lineares

Considere o seguinte sistema linear

$$(\star)\ \left\{\begin{array}{r} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 8 \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 4 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = -12 \end{array}\right. .$$

Temos que

$$(A|B) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & | & 8 \\ 4 & 2 & 2 & | & 4 \\ 2 & 5 & 3 & | & -12 \end{bmatrix}.$$

Aplicando o método de Gauss-Jordan à matriz $(A|B)$, vem

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & | & 8 \\ 4 & 2 & 2 & | & 4 \\ 2 & 5 & 3 & | & -12 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 \longrightarrow L_3 - L_1} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & | & 8 \\ 4 & 2 & 2 & | & 4 \\ 0 & 4 & 0 & | & -20 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2 \longrightarrow L_2 - 2L_1} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & | & 8 \\ 0 & 0 & -4 & | & -12 \\ 0 & 4 & 0 & | & -20 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \longrightarrow -\frac{1}{4}L_2} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & | & 8 \\ 0 & 0 & 1 & | & 3 \\ 0 & 4 & 0 & | & -20 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3 \longrightarrow \frac{1}{4}L_3} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & | & 8 \\ 0 & 0 & 1 & | & 3 \\ 0 & 1 & 0 & | & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \longrightarrow L_3} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & | & 8 \\ 0 & 1 & 0 & | & -5 \\ 0 & 0 & 1 & | & 3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_1 \longrightarrow L_1 - 3L_3} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & | & -1 \\ 0 & 1 & 0 & | & -5 \\ 0 & 0 & 1 & | & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \longrightarrow L_1 - L_2}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & | & 4 \\ 0 & 1 & 0 & | & -5 \\ 0 & 0 & 1 & | & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \longrightarrow \frac{1}{2}L_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 2 \\ 0 & 1 & 0 & | & -5 \\ 0 & 0 & 1 & | & 3 \end{bmatrix} = M.$$

Acabamos de obter M, que como já sabemos, é matriz aumentada de um sistema $(\star\star)$ equivalente à $(\star)$. Mas nós fomos sortudos aqui! Na verdade, esse novo sistema **já explicita** a solução de $(\star)$, pois

$$(\star\star) \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -5 \\ x_3 = 3 \end{cases}.$$

Assim, $S = \{(2, -5, 3)\}$.

Considere agora, o sistema

$$(\dagger) \quad \begin{cases} x + 2y - 3z = 3 \\ 2x + y - z = 2 \\ -x - 5y + 8z = 0 \end{cases}.$$

A matriz aumentada do sistema $(\dagger)$ é

$$(A|B) = \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & -3 & | & 3 \\ 2 & 1 & -1 & | & 2 \\ -1 & -5 & 8 & | & 0 \end{array}\right].$$

Escalonando $(A|B)$, temos

$$\left[\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & -3 & | & 3 \\ 2 & 1 & -1 & | & 2 \\ -1 & -5 & 8 & | & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 \longrightarrow L_3 + L_1} \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & -3 & | & 3 \\ 2 & 1 & -1 & | & 2 \\ 0 & -3 & 5 & | & 3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_2 \longrightarrow L_2 - 2L_1} \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & -3 & | & 3 \\ 0 & -3 & 5 & | & -4 \\ 0 & -3 & 5 & | & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 \longrightarrow L_3 - L_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & -3 & | & 3 \\ 0 & -3 & 5 & | & -4 \\ 0 & 0 & 0 & | & 7 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 \longrightarrow -\frac{1}{3}L_2} \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & -3 & | & 3 \\ 0 & 1 & -5/3 & | & 4/3 \\ 0 & 0 & 0 & | & 7 \end{array}\right].$$

O sistema equivalente à $(\dagger)$ obtido é

$$(\dagger\dagger) \quad \begin{cases} x + \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \\ y - \frac{5}{3}z = \frac{4}{3} \\ 0x + 0y + 0z = 7 \end{cases}.$$

Obviamente, a terceira equação deste novo sistema não é verdadeira. Portanto, o seu conjunto solução é $S = \emptyset$.

DETERMINANTES

Definição

Definir de maneira formal e precisa o determinante de uma matriz quadrada A_n não é uma tarefa simples, pois as ferramentas necessárias para isso são demasiado sofisticadas para um texto elementar como esse. O objetivo deste é apenas fornecer os rudimentos acerca dos assuntos aqui abordados, indispensáveis na graduação em cursos de Exatas. Desta forma, portanto, trabalharemos somente com determinantes de matrizes de ordem baixa, não ultrapassando $n = 4$.

O determinante é um número real associado à uma matriz quadrada A de ordem n, que será denotado por $det(A)$ ou $|A|$. Este número é dado por:

1. Se $n = 1$, então

$$det(A) = det(a) = a.$$

2. Se $n = 2$, então

$$det(A) = det\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\right) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

3. Se $n = 3$, então

$$det(A) = det\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\right) =$$

$$a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

4. Se $n = 4$, então

$$det(A) = det\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}\right) =$$

$$a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} + a_{12}a_{23}a_{34}a_{41} + a_{13}a_{24}a_{31}a_{42} + a_{14}a_{21}a_{32}a_{43} -$$
$$a_{13}a_{22}a_{31}a_{44} - a_{12}a_{21}a_{34}a_{43} - a_{11}a_{24}a_{33}a_{42} - a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}.$$

Propriedades do Determinante

1) $det(A) = det(A^t)$;

2) $det(A.B) = det(A).det(B)$;

   CUIDADO: Em geral, $det(A+B) \neq det(A)+det(B)$! Como exemplo disso, temos as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$.

3) Se A possui uma linha/coluna nula, então $det(A) = 0$;

4) Se A possui 2 linhas/colunas idênticas, ou onde uma linha/coluna seja múltipla escalar de outra, então $det(A) = 0$;

5) Se A é diagonal, triangular superior ou inferior, entao $det(A) = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ (produto dos elementos da diagonal principal);

6) Se B é a matriz obtida de A permutando-se uma única vez duas quaisquer linhas/colunas, então $det(B) = -det(A)$;

7) Se B é a matriz obtida de A multiplicando-se uma linha de A por um escalar real k, então $det(B) = k.det(A)$;

8) Se B é obtida de A quando somamos a uma linha um multiplo escalar de outra linha, então $det(B) = det(A)$.

Polinômio Característico de uma Matriz

O *polinômio característico* de uma matriz quadrada A é o determinante

$$det(A - x \cdot I_n) = |A - x \cdot I_n|, \text{ com } x \in \mathbb{R}.$$

Obviamente aqui, a matriz identidade e a matriz A possuem a mesma ordem. E é fácil ver que a conta desse determinante gera um polinômio $p(x)$ com coeficientes em $\mathbb{R}$, que será denotado por $p_A(x)$. As raízes de $p_A(x)$ são chamadas de *autovalores* de A e são extremamente importantes devido as suas várias aplicações em várias áreas da matemática. Vejamos um exemplo.

Exemplo: Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Temos, pelo produto de um escalar por uma matriz que

$$x \cdot I_3 = x \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix}.$$

Assim, o polinômio característico de A é dado por

$$det(A - x \cdot I_3) = det\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix}\right) =$$

$$det\left(\begin{bmatrix} 2-x & 0 & 1 \\ -1 & -2-x & 0 \\ 0 & 0 & -1-x \end{bmatrix}\right) = -(x-2)(x+2)(x+1) = p_A(x).$$

As raízes de $p_A(x)$ são $x = \pm 2$ e $x = -1$, e como já foi dito, estes valores sao os autovalores de A.

EXERCÍCIOS

Operações Elementares com Matrizes

Obtenha a forma escalonada reduzida das matrizes

1. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

Determine, através de operações elementares, quais matrizes são inversíveis.

1. $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 8 & 2 & 1 \\ 10 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 7 & 2 & 6 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} 7 & 7 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} -1 & 5 & 0 & 1 \\ 2 & 6 & -1 & 1 \\ 6 & -5 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

Sistemas de Equações Lineares

Resolva os sistemas lineares abaixo usando o método de Gauss-Jordan

1. $\begin{cases} 2x - 3y + z = 3 \\ 4x - 7y - z = 2 \\ 7x - y + 3z = 4 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 - 4x_4 = 6 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -3 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x - 7y = 7 \\ 3x - y = 8 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x + 2y - w = 2 \\ x + 2z - w = 2 \\ x + 2y + 2z - w = 4 \\ 3x + 4y + 4z - 3w = 8 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x + 6y - 8z = 1 \\ 2x + 6y - 4z = 0 \end{cases}$

Polinômio Característico de uma Matriz

Obtenha o polinômio característico de cada uma das matrizes quadradas dos dois primeiros exercícios e encontre os autovalores de cada uma delas.