UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
PROGRAMA DE EDUCAÇÃO TUTORIAL - MATEMÁTICA
PROJETO FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA ELEMENTAR

Assuntos: Produtos Notáveis; Equações; Inequações; Função; Função Afim; Paridade; Translação; Função injetiva, sobrejetiva e bijetiva e Função Composta

Professora: Franciane Fracalossi Rocha

1 Produtos Notáveis

Quadrado da soma de dois termos

O quadrado da soma de dois termos a e b é indicado por $(a+b)^2$, e para calculá-lo fazemos:

$$(a+b).(a+b) =$$

$$a^2 + ab + ab + b^2 =$$

$$a^2 + 2ab + b^2$$

Ou seja, o quadrado da soma de dois termos é igual ao quadrado do primeiro mais duas vezes o primeiro vezes o segundo mais o quadrado do segundo.

Exemplo:

$(5x+3y)^2 = 25x^2 + 30xy + 9y^2$

Quadrado da diferença de dois termos

O quadrado da diferença de dois termos a e b é indicado por $(a-b)^2$, e para calculá-lo fazemos:

$$(a-b).(a-b) =$$

$$a^2 - ab - ab + b^2 =$$
$$a^2 - 2ab + b^2$$

Ou seja, o quadrado da diferença de dois termos é igual ao quadrado do primeiro menos duas vezes o primeiro vezes o segundo mais o quadrado do segundo.

Exemplo:

$(5x - 3y)^2 = 25x^2 - 30xy + 9y^2$

Produto da soma pela diferença

O produto da soma pela diferença de dois termos a e b é indicado por $(a + b).(a - b)$, e para calculá-lo fazemos:

$$(a + b).(a - b) =$$
$$a^2 - ab + ab - b^2 =$$
$$a^2 - b^2$$

Ou seja, o quadrado da soma pela diferença de dois termos é igual ao quadrado do primeiro menos o quadrado do segundo.

Exemplo:

$(x + 2).(x - 2) = x^2 - 4$

Aplicações e Exemplos

1) O polinômio $(x + 5)(x - 5)(x^2 - 25)$ é idêntico a:

(a)$x^4 - 625$
(b)$x^4 + 625$
(c)$x^4 - 50x^2 + 625$
(d)$x^4 - 50x + 625$
(e)$x^4 + 50x^2 + 625$

$$(x + 5)(x - 5)(x^2 - 25) = (x^2 - 25)(x^2 - 25) = x^4 - 50x^2 + 625$$

Alternativa correta: (c)

2) Sabe-se que $x^2 + y^2 = 25$ e que $xy = 12$. Nessas condições, qual é o valor da expressão $(x + y)^2$?

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 = x^2 + y^2 + 2xy = 25 + 2.12 = 49$$

3) Escreva os polinômios abaixo na forma $A.x + b$:

(a)$x^2 + 4x + 4$

$x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$

(b)$x^2 + 4x + 9$

$x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2 - 4 + 9 = (x + 2)^2 + 5$

(c)$2x^2 - 12x + 8$

$2x^2 - 12x + 8 = 2(x^2 - 6x + 4) = 2((x - 3)^2 - 9 + 4) = 2((x - 3)^2 - 5) = 2(x - 3)^2 - 10$

(d)$x^2 + 8x - 5$

$x^2 + 8x - 5 = (x + 4)^2 - 16 - 5 = (x + 4)^2 - 21$

2 Equações

1) Uma balança está equilibrada. No prato esquerdo há um peso de 2 kg e duas melancias com pesos iguais. No prato direito há um peso de 14 kg. Quanto pesa cada melancia?

$$2melancias + 2kg = 14kg$$

seja x o peso de cada *melancia*

$$2x + 2 = 14$$
$$2x = 12$$
$$x = 6kg$$

2) Resolva a equação: $2(x + 4) = 8 + 2x$

$$2(x + 4) = 8 + 2x$$
$$2x + 8 = 8 + 2x$$
$$0x = 0$$
$$S = \{\forall x \in \mathbb{R}\}$$

3) Eu tenho o dobro da idade que tu tinhas quando eu tinha a idade que tu tens. Quando tiveres a idade que eu tenho quantos anos terás? Sabendo que quando tiveres a idade que eu tenho juntos teremos 135 anos.

Esquema de idades:

Tempo	Minha idade	Sua idade
agora	x	y
quando eu tinha a idade que tu tens	y	$y-(x-y)$
quando tiveres a idade que eu tenho	$x+(x-y)$	x

1ª equação: $x = 2(y-(x-y)) \Rightarrow x = 2y - 2x + 2y \Rightarrow 3x = 4y$

2ª equação: $x + (x-y) + x = 135 \Rightarrow 3x - y = 135$

$$\begin{cases} 3x = 4y \\ 3x - y = 135 \end{cases}$$

$$3x - y = 135 \Longrightarrow 4y - y = 135 \Rightarrow 3y = 135 \Rightarrow y = 45$$

$$3x = 4y$$

$$3x = 4.45$$

$$x = 60$$

3 Inequações

Resolva as seguintes inequações:

1) $3 - 2x \geq -12$

$$3 - 2x \geq x - 12$$

$$-2x - x \geq -12 - 3$$

$$3x \leq 15$$

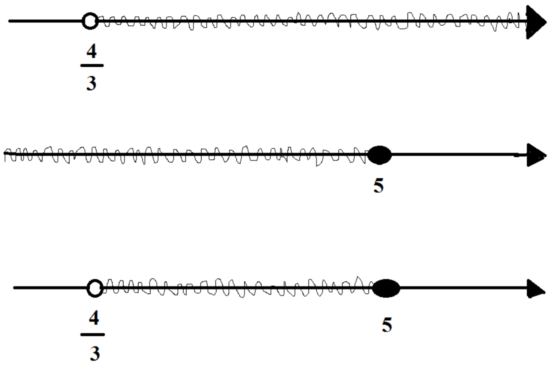
$$x \leq 5$$

$S = \{x \in \mathbb{R} / x \leq 5\} = [5, \infty)$

2) $\begin{cases} 3x - 4 > 0 \\ -x + 5 \geq 0 \end{cases}$

$3x - 4 > 0 \Rightarrow 3x > 4 \Rightarrow x > \dfrac{4}{3}$

$-x + 5 \geq 0 \Rightarrow -x \geq -5 \Rightarrow x \leq 5$



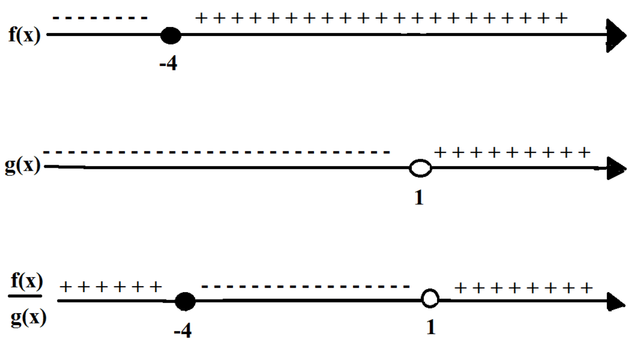
$$S=\{x\in\mathbb{R}/\frac{4}{3}<x\leq 5\}=(\frac{4}{3},5]$$

3) $\dfrac{x+4}{x-1}\geq 0$, com $x\in\mathbb{R}$ e $x\neq 1$

$f(x)=x+4$, raiz: -4 , sinal: $a=1>0$

$g(x)=x-1$, raiz: 1 , sinal: $a=1>0$

Quadro dos sinais:



$$S=\{x\in\mathbb{R}/x\leq -4 \text{ ou } x>1\}=(-\infty;-4]\cup(1,\infty)$$

4 Função

Definição:

Chama-se função toda correspondência f que associa a cada valor da variável x de um conjunto X, um único valor da variável y no conjunto Y.

Notação:

$$f : X \longrightarrow Y$$

$$x \longmapsto y = f(x)$$

O conjunto X é chamado de **domínio** da função f e Y o **contra-domínio**. A letra x representa a variável independente e y a variável dependente. O valor y é chamado de **imagem** de x pela função f e denotada por $y = f(x)$.

Exemplos:

1) Uma torneira despeja 12 litros de água por minuto em um recipiente inicialmente com 5 litros de água. A função

$$V(t) = 5 + 12t$$

expressa o volume (em litros) de água no recipiente em função do tempo t (minutos).

2) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função tal que $f(x) = x^2 + bx + c$ $(b, c \in \mathbb{R})$ e $f(1) = 2$ e $f(-1) = 12$. Vamos determinar $f(2)$:

$$f(1) = 2 \Rightarrow 1 + b + c = 2 \Rightarrow b + c = 1$$

$$f(-1) = 12 \Rightarrow 1 - b + c = 12 \Rightarrow -b + c = 11$$

Somando as expressões:

$$\Rightarrow 2c = 12 \Rightarrow c = 6$$

$$\Rightarrow 1 + b + 6 = 2 \Rightarrow b = -5$$

logo

$f(x) = x^2 - 5x + 6 \Rightarrow f(2) = 2^2 - 5(2) + 6 = 0$

Determinação do domínio:

Para funções reais quando não é dado explicitamente o domínio, convenciona-se tomar para domínio dessa função o conjunto dos números reais, excluídos apenas os números para os quais a lei não faz sentido.

Exemplos:

1) Sendo f dada por $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ devemos tomar $Dom(f) = \mathbb{R} - \{2\}$

2) Sendo $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$ temos $Dom(g) = \{x \in \mathbb{R}; x > -1\}$

5 Função Afim

Definição:

Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cuja lei de correspondência pode ser dada na forma $f(x) = ax + b$ em que a e b são números reais constantes, é chamada função afim.

Exemplo:

$f(x) = 2x + 1$ $(a = 2$ e $b = 1)$

Casos particulares de Função Afim:

a) Função Identidade:

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ $(a = 1$ e $b = 0)$

b) Função Linear:

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax$, $\forall x \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$ $(b = 0)$

c) Função Constante:

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = b$, $\forall x \in \mathbb{R}$ $(a = 0)$

d) Translação:

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x + b$, $\forall x \in \mathbb{R}$ $(a = 1)$

Zeros:

Dizemos que um elemento x_0 do domínio da função f é um zero da função se $f(x_0) = 0$. Nesse caso também dizemos que x_0 é uma raiz da equação $f(x) = 0$. Assim, encontrar os zeros da função afim $f(x) = ax + b$ com $a \neq 0$ é encontrar uma raíz da equação:

$$ax + b = 0 \Leftrightarrow ax = -b \Leftrightarrow x = \frac{-b}{a}$$

Portanto $x_0 = \dfrac{-b}{a}$ é o único zero da função afim $f(x) = ax + b$ $(a \neq 0)$

Exemplo:

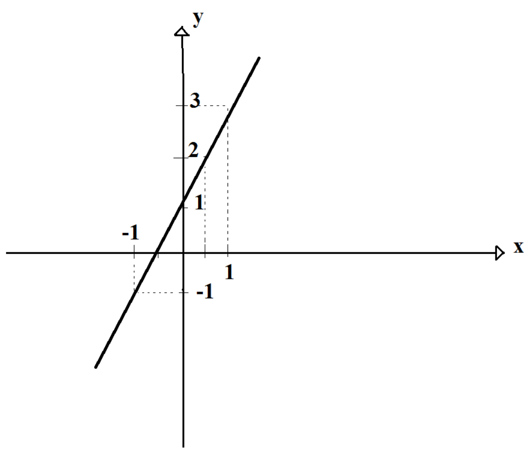
A raíz de $f(x) = 2x - 4$ é $x = 2$.

Gráfico:

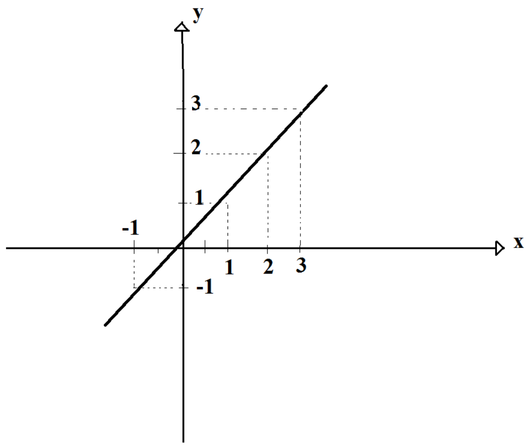
Sejam X e Y dois conjuntos e $f : X \longrightarrow Y$ uma função, o gráfico de f é o conjunto dos pares ordenados $\{(x, f(x))/x \in X\}$

Exemplos:

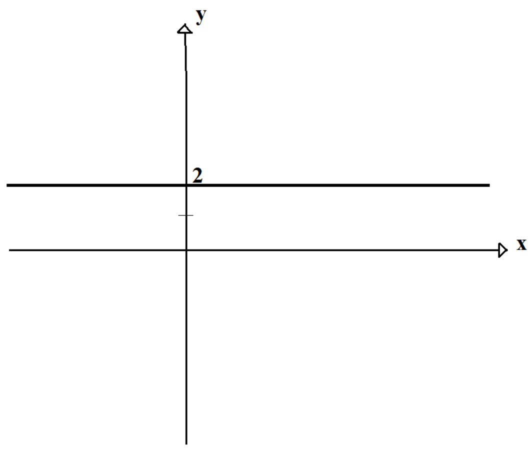
1) $f(x) = 2x + 1$



2) $f(x) = x$



3) $f(x) = 2$

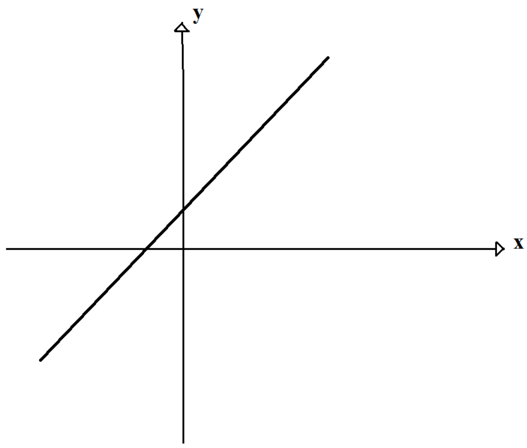


Crescimento e Decrescimento:

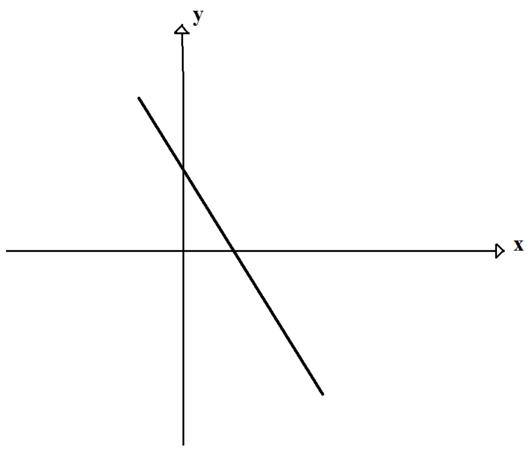
Seja $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, com $A \subset \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que f é crescente quando, para todo $x_1, x_2 \in A$ com $x_1 < x_2$ temos que $f(x_1) < f(x_2)$. Dizemos que f é decrescente quando para todo $x_1, x_2 \in A$, com $x_1 < x_2$ temos $f(x_1) > f(x_2)$.

Exemplos:

1) Função crescente, $a > 0$



2) Função decrescente, $a < 0$



O coeficiente a da expressão da função afim $f(x) = ax + b$ é denominado **coeficiente angular** da função f. Isto é, o valor de a determina quanto o gráfico de f está inclinado em relação ao eixo x.

6 Paridade

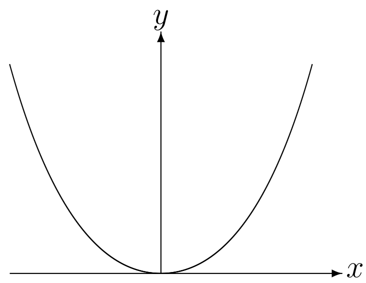
Seja $A \subset \mathbb{R}$ um subconjunto de $\mathbb{R}$ tal que para todo $x \in A$ o seu simétrico $-x \in A$.

Dizemos que $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ é par se $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in A$

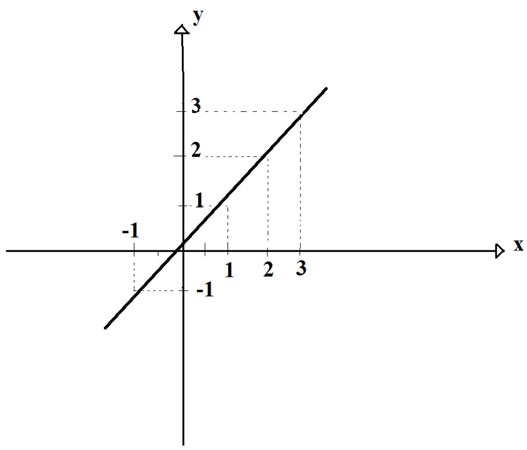
Dizemos que $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ é ímpar se $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in A$

Exemplos:

1) A função quadrática é uma função par, visto que $f(x) = f(-x)$, sendo $f(x) = x^2$



2) A função identidade é uma função ímpar, visto que $f(x) = -f(-x)$, sendo $f(x) = x$



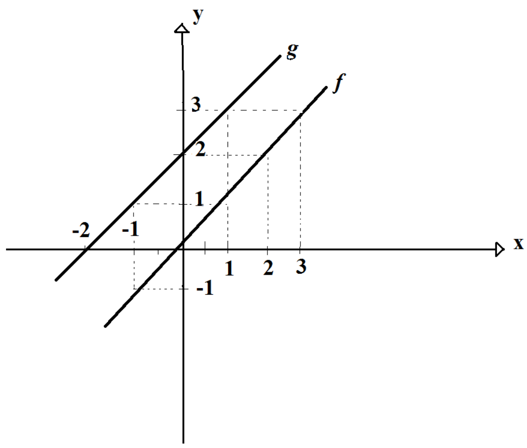
7 Translação

Vertical

Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função e $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = f(x)+k$, com $k \in \mathbb{R}$ uma constante. Dizemos que o gráfico $g(x)$ é um translado vertical do gráfico de $f(x)$.

Exemplo

$f(x) = x$ e $g(x) = f(x) + 2 = x + 2$

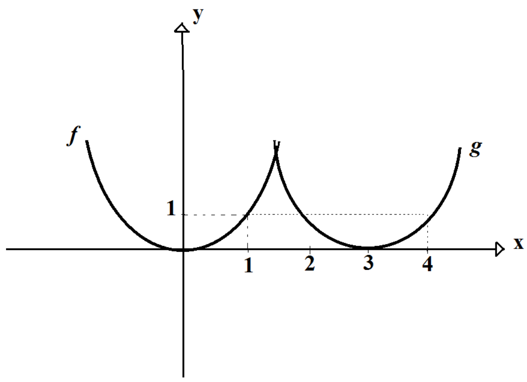


Horizontal

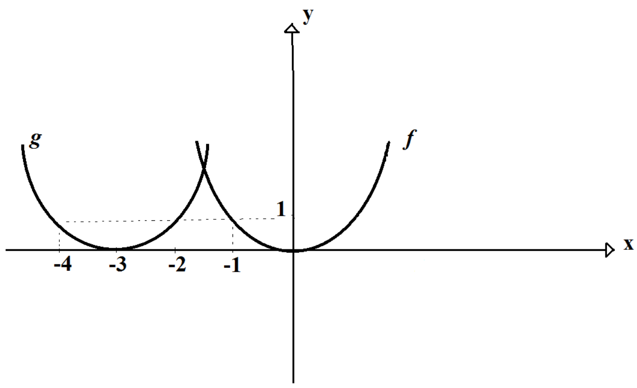
Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função e $k \in \mathbb{R}$ uma constante. A função definida por $g(x) = f(x + k)$ é uma translação de domínio da f, note que a imagem de g é igual a imagem de f, dizemos que $g(x)$ é uma translação horizontal de $f(x)$. Dizemos que o gráfico $g(x)$ é um translado vertical do gráfico de $f(x)$.

Exemplos

1) $f(x) = x^2$ e $g(x) = (x - 3)^2$



2) $f(x) = x^2$ e $g(x) = (x+3)^2$



8 Função injetiva, sobrejetiva e bijetiva

Uma função $f : A \longrightarrow B$ é dita **injetiva** se quaisquer $x_1, x_2 \in A$ com $x_1 \neq x_2$ implica que $f(x_1) \neq f(x_2)$

Exemplo

$f(x) = x^2$ não é injetiva, pois existem $x_1 = 1$ e $x_2 = -1$ tais que $f(x_1) = f(x_2)$, isto é, $f(-1) = f(1) = 1$.

Já a função $g(x) = x + 2$ é injetiva, de fato:
$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ com $x_1 \neq x_2$ temos que $g(x_1) = x_1 + 2$ e $g(x_2) = x_2 + 2$ logo
$x_1 \neq x_2 \Rightarrow x_1 + 2 \neq x_2 + 2 \Rightarrow g(x_1) \neq g(x_2)$

Uma função $f : A \longrightarrow B$ é dita **sobrejetiva** se $Im(f) = B$, ou seja, para todo elemento $y \in B$, existe pelo menos um elemento $x \in A$ tal que $f(x) = y$

Exemplo

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$f(x) = x^2$ não é sobrejetiva pois $Im(f) = \mathbb{R}_+$

Dizemos que uma função $f : A \longrightarrow B$ é **bijetiva**, quando ela é ao mesmo tempo injetiva e sobrejetiva.

9 Função Composta

Dadas as funções $f : A \longrightarrow B$ e $g : B \longrightarrow C$, denominamos **Função Composta** de g com a f a função $g \circ f : A \longrightarrow C$ definida por
$(g \circ f)(x) = g(f(x))$, para todo $x \in A$.

Observe que para encontrar $g(f(x))$ precisamos, inicialmente calcular $f(x)$, logo x deve pertencer ao domínio da função f. Em seguida calcular $g(f(x))$ o que exige que o elemento $f(x)$ pertença ao domínio de g.

Exemplo

Sejam $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x + 2$ e $g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x) = \sqrt{x}$.

Como $Im(g) = \mathbb{R}_+$ e $Dom(f) = \mathbb{R}$ temos $Im(g) \subseteq Dom(f)$, logo existe a função composta $f \circ g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = \sqrt{x} + 2$, e tem como domínio $\mathbb{R}_+$

Não é possível efetuar a composta $g \circ f$ com os domínios dados acima, pois $Im(f) = \mathbb{R}$ não está contida no $Dom(g) = \mathbb{R}_+$.

No entanto para que exista o cálculo de $g(f(x))$ é preciso tomar para domínio da função f um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ tal que o conjunto $f(A)$ das imagens de f esteja contido no $Dom(g) = \mathbb{R}_+$. Isto é, deve-se exigir que se $x \in A$ então $f(x) \in \mathbb{R}_+$.

Assim $A = \{x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R}/x + 2 \geq 0\} =$
$\{x \in \mathbb{R}/x \geq -2\}$

Ou seja, se tomarmos $A = [-2, +\infty)$ a composta $g \circ f$ será possível.

10 Exercícios

1) Escreva a função $f(x) = 2x^2 - 12x + 13$ na forma $ax^2 + b$.

2) Sabe-se que os pontos $(-1, 3)$ e $(2, 0)$ pertencem ao gráfico da função f, afim, dada por $f(x) = ax + b$, com a, b constantes reais. Determine, apresentando as devidas justificativas:

   a) Uma expressão geral para a função f;

   b) $f(-2)$;

   c) A função é crescente ou decrescente?

   d) O gráfico de f passa pela origem?

3) Uma encomenda, para ser enviada pelo correio, tem um custo C de 10 reais para um peso P de até 1 Kg. Para cada quilograma adicional ou fração de quilograma o custo aumenta 30 centavos. A função que representa o custo de uma encomenda de peso $P \geq 1$ kg é:

   a) $C = 10 + 3P$

   b) $C = 10P + 0,3$

   c)$C = 10 + 0,3(P - 1)$

   d) $C = 9 + 3P$

   e) $C = 10P - 7$

4) Segundo matéria publicada em O Estado de São Paulo, em 09/06/1996, o Instituto Nacional de Seguridade Social (INSS) gastava naquela época 40 bilhões de reais por ano com o pagamento de aposentadorias e pensões de 16 milhões de pessoas. A mesma matéria informa que o governo federal gastava também 20 bilhões de reais por ano com o pagamento de um milhão de servidores públicos federais aposentados. Indicando por x a remuneração anual média dos beneficiários do INSS e por y a remuneração anual média dos servidores federais aposentados, então y é igual a:

   a) $2x$

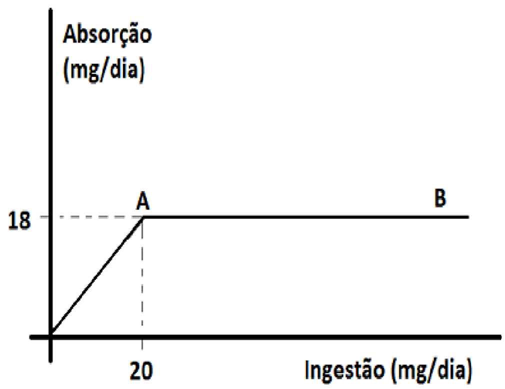
   b) $6x$

   c)$8x$

   d) $10x$

   e) $16x$

5) Observe o gráfico, em que o segmento AB é paralelo ao eixo das abscissas. Esse gráfico representa a relação entre a ingestão de certo composto, em mg/dia, e sua absorção pelo organismo, também em mg/dia. A única afirmativa falsa relativa ao gráfico é:



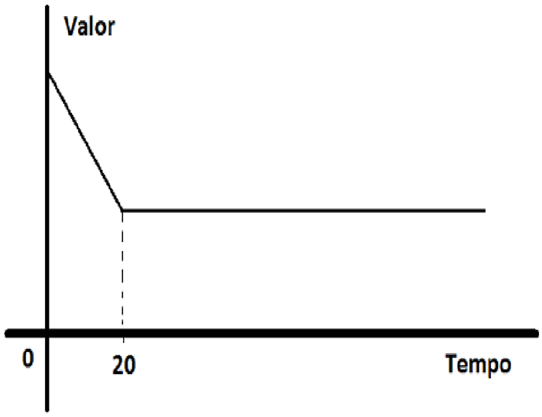
a)Para ingestões de até $20mg/dia$, a absorção é proporcional à quantidade ingerida.

b)A razão entre a quantidade absorvida e a quantidade ingerida é constante.

c)Para a ingestão acima de $20mg/dia$, quanto maior a ingestão, menor a porcentagem absorvida do composto ingerido

d) A absorção resultante da ingestão de mais de $20mg/dia$ é igual à absorção resultante da ingestão de $20mg/dia$.

6) Um veículo de transporte de passageiros tem seu valor comercial depreciado linearmente, isto é, seu valor comercial sofre desvalorização constante por ano.Veja a figura abaixo. Esse veículo foi vendido pelo seu primeiro dono, após 5 anos de uso, por 24 mil reais. Sabendo que o valor comercial do veículo atinge seu valor mínimo, após 20 anos de uso, e que esse valor mínimo corresponde a 20 por cento do valor que tinha quando era novo, então qual é esse valor mínimo?



a) 3 mil reais

b) 12 mil reais

c) 7500 reais

d) 6 mil reais

e) 4500 reais

7) Uma pessoa obesa, pesando em certo momento $156kg$, recolhe-se a um spa onde se anunciam perdas de peso de até $2,5Kg$ por semana. Suponhamos que isso realmente ocorra. Nessas condições:

a) Encontre uma fórmula que expresse o peso mínimo P que essa pessoa poderá atingir após n semanas.

b)Calcule o número mínimo de semanas completas que a pessoa deverá permanecer no spa para sair de lá com menos de $120Kg$ de peso.

8) Verifique a paridade da seguinte função: $g(x) = x^2 + x$

9) Dada a função $f(x) = \sqrt{x}$, explique qual a diferença nos gráficos de $g(x) = \sqrt{x} - 2$ e $h(x) = \sqrt{x-2}$ com relação ao de $f(x)$.

10) Justifique: A função $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = x + 5$ é bijetiva.

11) Dadas as funções $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = \sqrt{x-2}$, encontre $(f \circ g)$ e seu domínio.

12) Dada a função $F(x) = cos^2(x + 9)$, encontre as funções f, g, h tais que $F = f \circ g \circ h$.

11 Soluções dos Exercícios

1) $f(x) = 2x^2 - 12x + 13 = 2(x^2 - 6x) + 13 = 2(x-3)^2 - 18 + 13 = 2(x-3)^2 - 5$

2) a) $f(x) = -x + 4$;

   b) $f(-2) = 6$;

   c) f é decrescente;

   d) Não.

3) c)$C = 10 + 0,3(P - 1)$

4) c)$8x$

5) b)A razão entre a quantidade absorvida e a quantidade ingerida é constante.

6) d) 6 mil reais

7) a) $P = 156 - 2,5n$

   b) 15 semanas

8) $g(-x) = (-x)^2 + (-x) = x^2 - x$ logo $g(-x) \neq g(x)$ e $g(-x) \neq -g(x)$

   Ou seja a função não é par nem ímpar.

9) O gráfico de $g(x)$ é o gráfico de $f(x)$ deslocado duas unidades para baixo; e o gráfico de $h(x)$ é o gráfico de $f(x)$ deslocado duas unidades para a direita.

10) $g(x)$ é injetiva, pois:

    $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ com $x_1 \neq x_2$ temos $g(x_1) = x_1 + 5$ e $g(x_2) = x_2 + 5$ e como

    $x_1 \neq x_2 \Rightarrow x_1 + 5 \neq x_2 + 5 \Rightarrow g(x_1) \neq g(x_2)$.

    $g(x)$ é sobrejetiva, pois:

    Dado qualquer $b \in \mathbb{R}$, existe $a = b - 5 \in \mathbb{R} = Dom(g)$ tal que

    $g(a) = g(b-5) = (b-5) + 5 = b$. Isto é $g(a) = b$.

    Portanto, como é injetiva e sobrejetiva, logo é bijetiva.

11) $(f \circ g) = f(g(x)) = f(\sqrt{2-x}) = \sqrt{\sqrt{2-x}} = \sqrt[4]{2-x}$

    O domínio de $(f \circ g)$ é $\{x/2 - x \geq 0\} = \{x/x \leq 2\} = (-\infty, 2]$

12) Como $F = [cos(x+9)]^2$ temos que:

Primeiro adicionamos 9, então tomamos o cosseno do resultado, e finalmente, o quadrado. Assim, fazemos

$h(x) = x + 9$, $g(x) = cos(x)$ e $f(x) = x^2$. Então

$(f \circ g \circ h) = f(g(h(x))) = f(g(x+9)) = f(cos(x+9)) = [cos(x+9)]^2 = F(x)$