Funções Racionais

Definição

"Função Racional"é o nome dado a uma função representada como um quociente entre dois polinômios.

Em símbolos, seja f uma função racional, tal que

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \frac{n(x)}{d(x)}$$

onde $n(x)$ e $d(x)$ são polinômios quaisquer com $d(x) \neq 0$ para todo $x \in D$.

Observação 1. *Note que podemos ver as funções racionais como uma generalização das funções polinomiais, pois basta tomar o denominador como a função* $d(x) = 1$.

Domínio

Já temos definido que a função racional é da forma $f(x) = \dfrac{n(x)}{d(x)}$.

Como $n(x)$ e $d(x)$ são polinômios ambos são definidos para todo número real e para a expressão $f(x) = \dfrac{n(x)}{d(x)}$ fazer sentido teremos que ter o seguinte domínio:

$$Dom(f) = \{x \in \mathbb{R}; d(x) \neq 0\}$$

Em outras palavras, o domínio será todos os valores reais a menos das raízes de $d(x)$.

Raízes

As raízes (ou zeros) de qualquer função f é por definição, todos os valores de $x \in Dom(f)$ tais que $f(x) = 0$.

No nosso caso, como f é da forma

$$f(x) = \frac{n(x)}{d(x)}$$

teremos

$$\frac{n(x)}{d(x)} = 0 \Longleftrightarrow n(x) = 0$$

Assim recaímos aos zeros do polinômio $n(x)$. Considere $Z(f)$ o conjunto das raízes de $f(x)$, então:

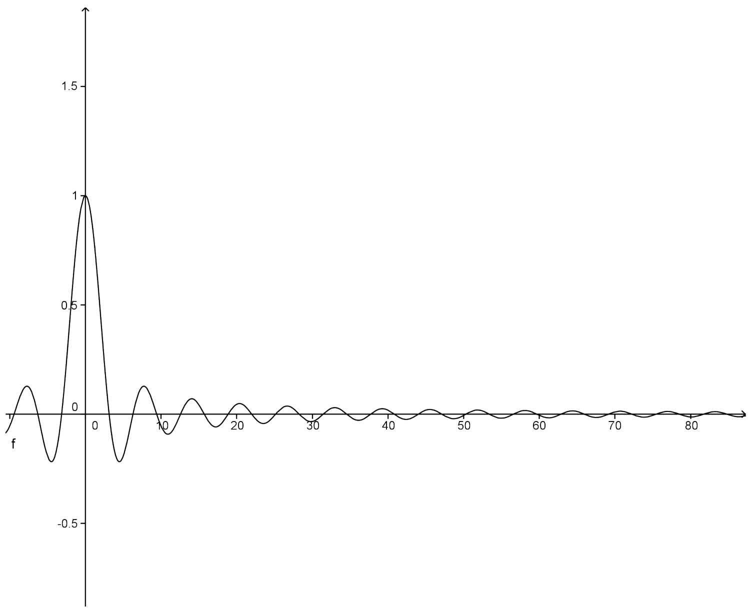
$$Z(f) = \{x \in Dom(f); f(x) = 0\}$$

$$Z(f) = \{x \in Dom(f); n(x) = 0\}.$$

Assíntotas

Dada uma função racional qualquer f, logo temos o gráfico de f, denotado por $Gr(f)$.

Definimos uma assíntota do $Gr(f)$ como uma linha imaginária em que os pontos do $Gr(f)$ aproximam-se desta linha indefinadamente, podendo ter inúmeras intersecções.



Existem três tipos de assíntotas, a saber:

Assíntotas Verticais: São linhas verticais da forma $x = a$ com $a \in \mathbb{R}$.

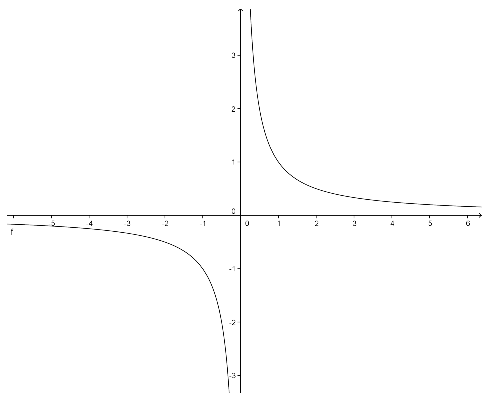
Assíntotas Horizontais: São linhas horizontais da forma $y = c$ com $c \in \mathbb{R}$.

Assíntotas Oblíquas (ou inclinada): São retas da forma $y = ax + b$ com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

Casos Especiais

Será visto em Cálculo I como esboçar qualquer tipo de função usando tecnicas de limite e derivada. Neste momento será apresentado dois casos particulares.

Função[1] $f(x) = \dfrac{1}{x}$



Note que temos:

1. Duas Assíntotas, uma vertical $x = 0$ e uma horizontal $y = 0$;
2. Seu domínio é $Dom(f) = \{x \in \mathbb{R}; x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$;
3. Não apresenta raízes.

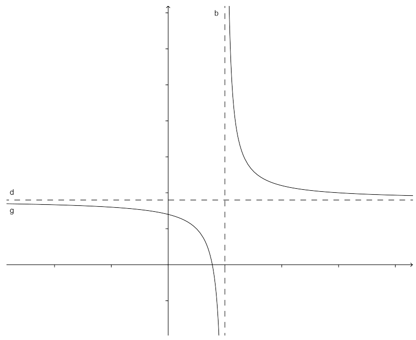
Podemos generalizar a f ficando na forma

$$f(x) = c + \frac{1}{x - a}$$

com $c, a \in \mathbb{R}$ e $c^2 + a^2 \neq 0$.

Desta forma ficamos com o gráfico:

[1] Está função é conhecida como Hipérbole Equilátera

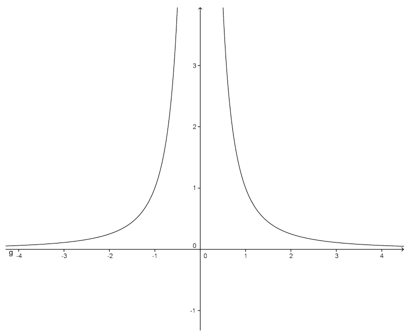


Com as seguintes características:

1. Uma vertical $x = a$ e uma horizontal $y = c$;
2. Seu domínio é $Dom(f) = \{x \in \mathbb{R}; x - a \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{a\}$;
3. $Z(f) = \{x \in \mathbb{R}; f(x) = 0\}$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow c + \frac{1}{x-a} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{ca-1}{c}.$$

Função $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$



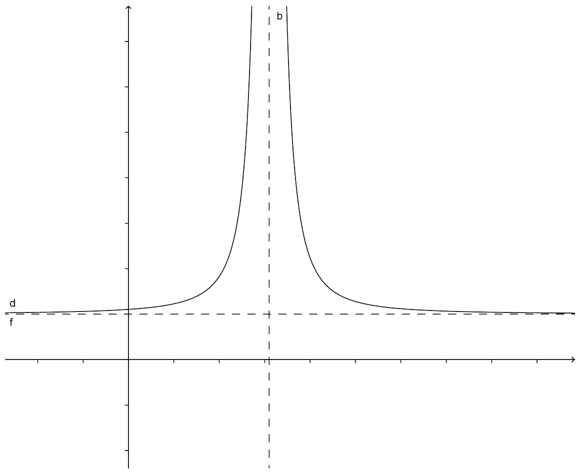
Temos no gráfico acima as mesmas características do gráfico da $f(x) = \dfrac{1}{x}$ (assíntotas, domínio e raízes).

Vamos também fazer uma generalização, obtendo a função

$$g(x) = c + \frac{1}{(x-a)^2}$$

com $c, a \in \mathbb{R}$ e $c^2 + a^2 \neq 0$, com o gráfico

O gráfico tem as seguintes características:



1. Uma vertical $x = a$ e uma horizontal $y = c$;
2. Seu domínio é $Dom(f) = \{x \in \mathbb{R}; (x - a)^2 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{a\}$;
3. $Z(f) = \{x \in \mathbb{R}; f(x) = 0\}$

Estudo de Sinais

Iremos estudar nesta seção com as duas propriedades abaixo e os exemplos que se seguem.

Lembrando que o objetivo é sempre deixar o zero em um dos lados da desigualdade e no outro escrever a expressão em produtos de termos lineares e quadráticos irredutives, para serem analisados separadamente.

Propriedade 1. *Somando os dois membros de uma desigualdade pelo mesmo valor, a desigualdade mantém o mesmo sentido.*

Propriedade 2. *Multiplicando os dois membros da desigualdade por um mesmo valor diferente de zero, e*

a) positivo, mantemos o mesmo sentido da desigualdade;

b) negativo, invertemos o sentido da desigualdade.

Exemplo 1: $-\dfrac{4x}{(x^2 - 1)} < 0$

Exemplo 2: $\dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x - 1} + \dfrac{3}{x - 2} \geq 0$

Exemplo 3: $\dfrac{x-1}{x-2} > \dfrac{x-3}{x-4}$

Exemplo 4: $\dfrac{4x-8}{x^4-1} < \dfrac{1}{x^2+1}$

Frações Parciais

Já sabemos como reduzir frações a um mesmo denominador, usando por exemplo o m.m.c. Agora iremos ver como fazer o procedimento inverso separando uma fração dada numa soma de frações, tendo denominador mais simples. Esse procedimento denomina-se **Decomposição de Frações Parciais**.

Resultados de Álgebra nos garante que qualquer função racional $f(x) = \dfrac{n(x)}{d(x)}$, não importanto o quanto seja complicada, pode ser reescrita como a soma de funções racionais (frações parciais) tendo as seguintes formas:

$$f(x) = \frac{A_1}{(a_1x+b_1)^{r_1}} + \frac{A_2}{(a_2x+b_2)^{r_2}} + \cdots + \frac{B_1x+C_1}{(a_1x^2+b_1x+c_1)^{r_1}} + \frac{B_2x+C_2}{(a_2x^2+b_2x+c_2)^{r_2}} + \cdots +$$

com $A_i, B_i, C_i \in \mathbb{R}$ e $r_i \in \mathbb{N}$

Assim sendo, abordaremos a técnica das frações parciais. A decomposição em frações parciais permite integrar qualquer função racional dada. Logo, um melhor entendimento é de fundamental importância.

Determinaremos a decomposição em frações parciais nos seguintes passos, considere uma função racional da forma $f(x) = \dfrac{n(x)}{d(x)}$:

1. Se o grau de $n(x)$ for maior que o grau de $d(x)$ efetue a divisão.

2. Expresse $d(x)$ como um produto de fatores lineares $ax + b$ ou fatores quadráticos irredutíveis $(\Delta < 0)$ da forma $ax^2 + bx + c$, e agrupe os fatores repetidos de modo que $d(x)$ seja produto de fatores distintos da forma $(ax + b)^n$ ou $(ax^2 + bx + c)^n$ para $n \geqslant 0$.

3. Aplique as seguintes regras:

a) Para cada fator $(ax+b)^n$ com $n \geqslant 0$, a decomposição em frações parciais contém uma soma finita da seguinte forma:

$$\frac{A_1}{(a_1x+b_1)^{r_1}} + \frac{A_2}{(a_2x+b_2)^{r_2}} + \cdots + \frac{A_n}{(a_nx+b_n)^{r_n}}$$

em que cada $A_i \in \mathbb{R}$.

b) Para cada fator $(ax^2+bx+c)^n$ com $n \geqslant 0$ e com (ax^2+bx+c) irredutível a decomposição em frações parciais contem uma soma finita da seguinte forma:

$$\frac{B_1x + C_1}{(a_1x^2 + b_1x + c_1)^{r_1}} + \frac{B_2x + C_2}{(a_2x^2 + b_2x + c_2)^{r_2}} + \cdots + \frac{B_nx + C_n}{(a_nx^2 + b_nx + c_n)^{r_n}}$$

em que cada $B_i, C_i \in \mathbb{R}$

Procedendo da forma acima em relação a cada fator quadrático e cada fator linear, identificamos a fração original $f(x) = \dfrac{n(x)}{d(x)}$ com a soma de todas as frações parciais correspondentes.

Veremos alguns métodos práticos de decomposição em frações parciais sendo explicados por exemplos.

Método I: Comparação de Termos

Nesse método iremos descobrir os coeficiente por meio de um sistema.

Vamos decompor a expressão:

$$f(x) = \frac{3x^2 + x + 4}{x^3 + x}.$$

Note que o denominador pode ser fatorado como $x^3 + x = x(x^2 + 1)$. Aplicando as regras acima teremos:

$$\frac{3x^2 + x + 4}{x^3 + x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1}$$

Multiplicando pelo mínimo denominador comum, obtemos:

$$3x^2 + x + 4 = A(x^2 + 1) + (Bx + C)x$$

$$3x^2 + x + 4 = (A + B)x^2 + Cx + A$$

Sabendo que dois polinômios são iguais se, só se, os coeficientes de igual potência são os mesmos.

Assim temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} A + B = 3 \\ C = 1 \\ A = 4 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema encontramos $A = 4$, $B = -1$ e $C = 1$. Portanto, a decomposição em frações parciais é dada por:

$$\frac{3x^2 + x + 4}{x^3 + x} = \frac{4}{x} + \frac{1 - x}{x^2 + 1}$$

Método II: Atribuindo Valores a x

Nesse método será atribuido diversos valores a x, começando pelas raizes obtendo assim os coeficientes.

Vamos decompor a expressão:

$$\frac{2x^2 - x + 3}{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}$$

Note que o denominador pode ser fatorado como:

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x-1)(x+2)(x-3)$$

Assim a expressão pode ser decomposta como uma soma de três frações onde só seus denominadores são, respectivamente, $x-1, x+2$ e $x-3$ faltando apenas determinar os numeradores, então temos a seguinte igualdade:

$$\frac{2x^2 - x + 3}{x^3 - 2x^2 - 5x + 6} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-3}$$

Multiplicando toda a igualdade anterior teremos:

$$2x^2 - x + 3 = A(x+2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)(x+2)$$

Em casos como este, em que os fatores são todos lineares e não repetidos, os valores de A, B e C podem ser obtidos começando pelas raízes dos denominadores, de modo que os cálculos resultem são simples quanto possível.

Substituindo nesta última identidade, respectivamente, os valores das raízes $x = 1$, $x = -2$ e $x = 3$, obtemos:

$$\begin{cases} 4 = A(1+2)(1-3) \Rightarrow 4 = -6A \Rightarrow A = -\dfrac{2}{3} \\ 9 = B(-2-1)(-2-3) \Rightarrow 9 = 15B \Rightarrow B = \dfrac{3}{5} \\ 18 = C(3-1)(3+2) \Rightarrow 18 = 10C \Rightarrow C = \dfrac{9}{5} \end{cases}$$

Já determinados os numeradores A, B, e C podemos substituí-los nas frações parciais:

$$\frac{2x^2 - x + 3}{x^3 - 2x^2 - 5x + 6} = -\frac{2}{3(x-1)} + \frac{3}{5(x+2)} + \frac{9}{5(x-3)}$$

Projeto Pré-Cálculo
Aula de Função Racional

Exercício

Casos Especiais

Determine o domínio, as raízes (se existirem) e assíntotas das funções abaixo e faça um esboço do gráfico.

1. $f(x) = 4 + \dfrac{1}{x+2}$
2. $g(x) = 1 + \dfrac{1}{x^2 + 6x + 9}$
3. $h(x) = -\dfrac{x}{x+1}$
4. $k(x) = \dfrac{x^2 - 6x + 10}{9 - 6x + x^2}$

Estudo de Sinais

Resolva as inequações abaixo em $\mathbb{R}$.

1. $\dfrac{x}{x-4} > 2$
2. $\dfrac{x^2 + x}{x^2 - 1} > 1$
3. $\dfrac{x}{x+2} > \dfrac{1}{x}$
4. $\dfrac{t^4 + t^2 + 1}{(t^2+1)(t^2-4)^2} < 0$
5. $\dfrac{x+2}{x^4 - x^2} < 0$

Frações Parcias

Escreva as formas de decomposição em frações parcias das funções abaixo.

1. $\dfrac{x-2}{x^2 + 3x - 4}$
2. $\dfrac{x-1}{x^3 + x}$
3. $\dfrac{t^4 + t^2 + 1}{(t^2+1)(t^2+4)^2}$
4. $\dfrac{2x+1}{(x-1)^3(x^2+4)^2}$
5. $\dfrac{x+5}{2x^3 - 7x^2 + 4x + 4}$