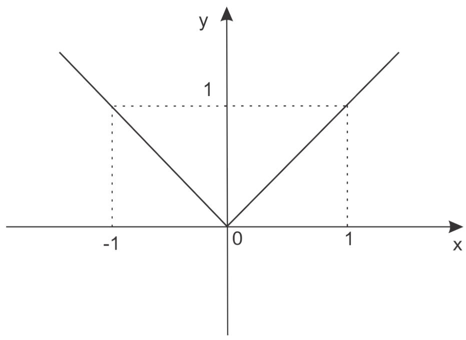
Projeto Introdução ao Cálculo para Engenharias

Programa de Educação Tutorial - PET Matemática

Aula nº 08 - Dia: 18/08/2011 - Stéfani Concolato Vieira

Funções Modulares

A função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x| = \begin{cases} x, & se\ x \geq 0 \\ -x, & se\ x < 0 \end{cases}$ é chamada função *valor absoluto* ou *modular*. Como $f(-x) = |-x| = |x| = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$ então f é uma função par, logo tem seu gráfico simétrico em relação ao eixo y.
Gráfico da função f é:



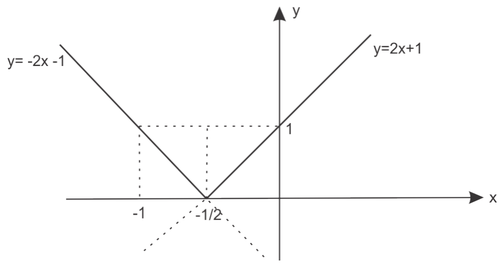
Exemplos: Esboçar os gráficos das funções:

a) $g(x) = |2x + 1|$

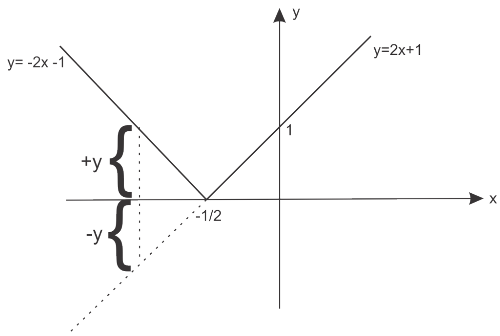
1º MODO:

$$g(x) = |2x+1| = \begin{cases} 2x + 1, & se\ \ 2x + 1 \geq 0 \\ -(2x + 1), & se\ \ 2x + 1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2x + 1, & se\ \ x \geq -\frac{1}{2} \\ -2x - 1, & se\ \ x < -\frac{1}{2} \end{cases}$$

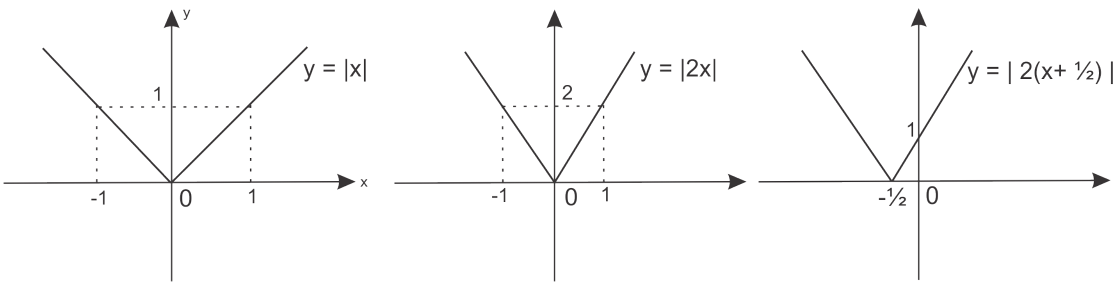
$Dom(g) = \mathbb{R}$ e $Im(g) = \mathbb{R}_+$



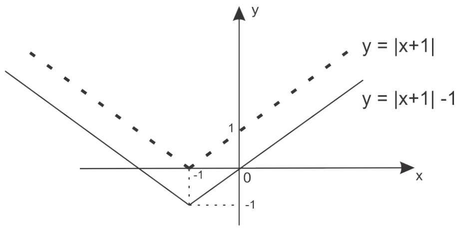
2º MODO: Esboça-se o gráfico de $y = 2x+1$ e faz-se uma reflexão, em torno do eixo x, dos pontos do gráfico que possuem ordenada negativa.



3º MODO: $g(x) = |2x+1| = |2(x+\frac{1}{2})|$. O $Gr(g)$ é uma contração horizontal de $k = 2$ seguida de uma translação horizontal de $a = \frac{1}{2}$ do gráfico de $f(x) = |x|$.

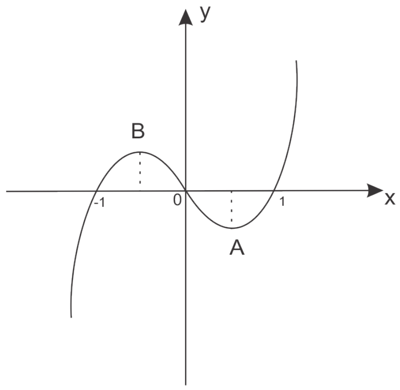


b) $h(x) = |x+1| - 1$
$Dom(h) = \mathbb{R}$
$Gr(h)$ é translação seguida de translação vertical do $Gr(f)$.
$Im(h) = [-1, +\infty)$



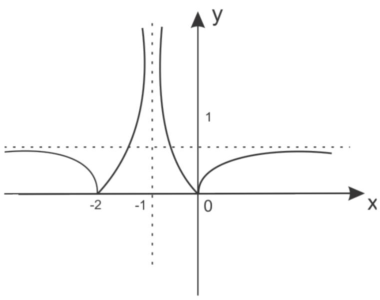
c) $k(x) = x|x| - x$

$$k(x) = x|x| - x = \begin{cases} x^2 - x, \ se \ x \geq 0 \\ -x^2 - x, \ se \ x > 0 \end{cases} = \begin{cases} x(x-1), \ se \ x \geq 0 \\ -x(x+1), \ se \ x > 0 \end{cases}$$



Onde $A(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$ e $B(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$.

d) $f(x) = |-\frac{1}{(x+1)^2} + 1|$



$Dom(f) = \mathbb{R} - \{1\}$
As retas $x = -1$ e $y = 1$ são assíntotas respectivamente, vertical e horizontal do gráfico da função f.

Funções definidas por partes

Em muitas situações é necessário definir-se uma função de uma variável com várias expressões algébricas em diferentes partes do domínio. **Exemplos:** Dê o conjuntos dos zeros das seguintes funções, seu domínio, o conjunto imagem e o esboço de seu respectivo gráfico.

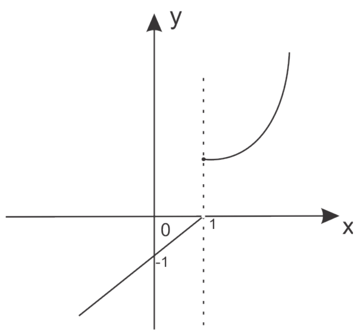
a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 3, & se\ x \geq 1 \\ x - 1, & se\ x < 1 \end{cases}$

É evidente que: $Dom(f) = \mathbb{R}$. Além disso, temos que:

$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 + 2, & se\ x \geq 1 \\ x - 1, & se\ x < 1 \end{cases}$

Daí, $f(x) = 0 \Leftrightarrow 0 = \begin{cases} (x-1)^2 + 2, & e\ x \geq 1 \\ x + 1, & e\ x < 1 \end{cases} \Rightarrow Z(f) = \{1\}$.

$Im(f) = \mathbb{R}$



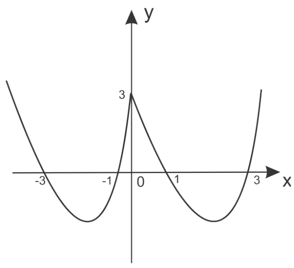
b) $g(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3, & se\ x \geq 0 \\ x^2 + 4x + 3, & se\ x \leq 0 \end{cases}$

É evidente que: $Dom(f) = \mathbb{R}$.

Além disso, temos que: $g(x) = \begin{cases} (x-2)^2 - 1, & se\ x \geq 0 \\ (x+2)^2 - 1, & se\ x \leq 0 \end{cases}$

Daí, $g(x) = 0 \Leftrightarrow 0 = \begin{cases} (x-2)^2 - 1, & e\ x \geq 0 \\ (x+2)^2 - 1, & e\ x < 0 \end{cases} \Rightarrow Z(g) = \{-3, -1, 1, 3\}$

Esboço do gráfico de g: $Im(g) = [-1, \infty)$



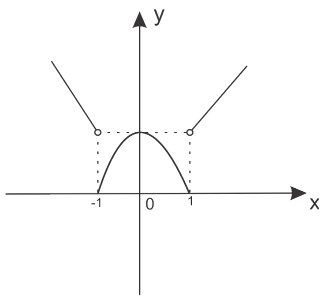
c) $j(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & se\ |x| \leq 1 \\ |x|, & se\ |x| > 1 \end{cases}$

É evidente que: $Dom(j) = \mathbb{R}$.

Além disso, temos que: $j(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & se\ -1 \leq x \leq 1 \\ |x|, & se\ x > 1\ e\ x < -1 \end{cases}$

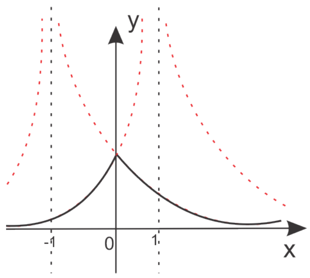
Daí, $j(x) = 0 \Leftrightarrow 0 = \begin{cases} 1 - x^2, & e\ -1 \leq x \leq 1 \\ |x|, & e\ x > 1\ e\ x < -1 \end{cases} \Rightarrow Z(j) = \{-1, 1\}$.

Esboço do gráfico de j:



d) $m(x) = \begin{cases} \frac{1}{(x-1)^2} & se\ x \leq 0 \\ \frac{1}{(x+1)^2} & se\ x > 0 \end{cases}$

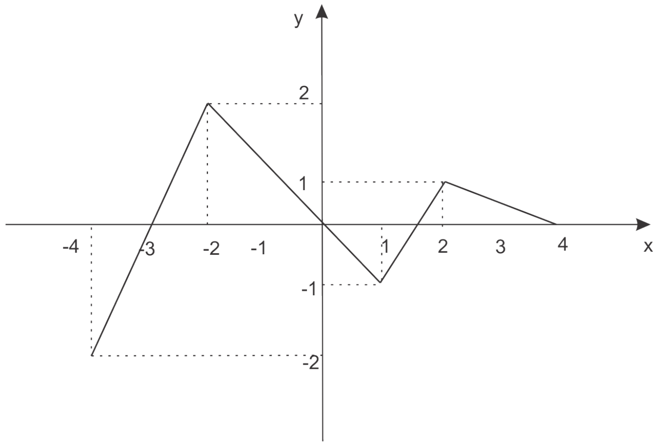
Temos que $Dom(f) = \mathbb{R}$. Além disso, $Z(m) = \emptyset$. Esboço do gráfico de m:



Portanto, $Im(f) = \mathbb{R}_+ - \{0\}$

Lista de Exercícios

01) O gráfico da função f é dado abaixo.



Esboce o gráfico das funções:

a) $g(x) = |f(x)|$

b) $h(x) = \begin{cases} f(x), & se\ x \leq 0 \\ |f(x)|, & se\ x > 0 \end{cases}$

02) Dê o domínio, os zeros, o conjunto imagem e esboce o gráfico de cada função abaixo:

a) $f(x) = \begin{cases} x+1, & se\ x \geq 0 \\ x-1, & se\ x < 0 \end{cases}$

b) $d(x) = x|x| - x$

c) $g(x) = |x^3|$

d) $h(x) = \left|\dfrac{1}{x-4}\right|$

e) $j(x) = \begin{cases} (x+1)^3, & se\ x < -1 \\ x^2 - 1, & se\ -1 \leq x \leq 1 \\ |x-1|, & se\ x > 1 \end{cases}$

f) $s(x) = |x - 4|x| + 3|$

g) $v(x) = \begin{cases} x^2, & se\ x \leq 1 \\ \dfrac{1}{x^2}, & se\ x > 1 \end{cases}$

h) $p(x) = \sqrt{|x|}$