O Problema de Monty Hall

Silvano A. A. P. Junior

Resumo

Trataremos de forma breve, através do Problema de Monty Hall, de como princípios probabilisticos são usados erroneamente em nosso dia a dia.

Introdução

Jogos e seriados, esses talves sejam os maiores detentores de sucesso entre os jovens nos dias atuais. Procuraremos, sem grandes pretenções, usá-los como artificios para nos dirigirmos a uma breve reflexão sobre alguns dos principios básicos da *Teoria de Probabilidades* que usamos indistintamente em nosso dia a dia.

1 Pagando a Faculdade com Jogos de Azar

Hoje os estudantes dispõem de uma boa quantidade de bolsas para auxiliá-los em seus estudos. Mas nem sempre foi assim.

No início do *Século XVI* encontramos um ilustre personangem na história da matemática, com alguns episódios dignos de serem lembrados. Estamos falando de Gerolamo Cardano (como no original), ou Jerônimo Cardano (como preferem escrever alguns), matemático de origem italiana nascido em 1501.

Cardano com certeza não foi a criança mais sortuda do mundo, sua mãe Chiara, que apesar de ter outros três filhos não gostava de crianças, quando soube estar grávida de Cardano tomou uma espécie de pílula do dia seguinte (na verdade um chá de losna, grão de cavada queimado e raiz de tamarisco). Fruto da aleatoriedade, Cardano não sofreu mal algum pelo chá engerido. Logo após o nascimento de Cardano a parteira informou a Chiara que o bebê não viveria mais que algumas horas. Indo contra a

Fig. 1: Pintura de Cardano

torcida de sua mãe Cardano novamente sobreviveu. Considerado por todos uma criança fraca e doente Cardano, junto com seus três irmãos, foi atingido pela *Peste Negra*[1] que assolou a europa naquele século. Uma pessoa tinha espectativa de vida de no máximo uma semana após o aperecimento da doença. Mas uma vez, mostrando ser dono de uma grande *"sorte"*, Cardano escapa da morte, perdendo porém seus irmãos. Além das verrugas espalhadas por todo o rosto, Cardano recebeu da *Peste Negra* o destino de viver quase 75 anos.

Em 1516 Cardano descidiu por ir estudar medicina em Pavia, o que causou um certo empasse com seu pai, Fazio Cardano, que desejava que Cardano estudasse direito, uma vez que receberia um estipêndio anual de 100 coroas para pagar suas despesas. Após discussões familiares Fazio autorizou que cardano fosse estudar medicina, mas restava ainda uma questão: sem o estipêndio, como ele pagaria se manteria em Pavia? Neste ponto Cardano já havia começado a guardar o dinheiro que ganhava escrevendo horóscopos e dando aulas de geometria. Mas algum tempo depois ele percebeu que tinha uma certa *"sorte"* com jogos de apostas, os quais lhe rendiam dinheiro muito mais rápido. Naquele tempo qualquer lugar era o lugar certo para quem deseja-se fazer apostas. Faziam-se apostas em jogos de cartaz, gamão, dados e até mesmo xadres. Cardano classificava os jogos em duas classes distintas: os que envolviam alguma estratégia e os que dependiam puramente do acaso. Ele passou a apostar em jogos que dependiam puramente do acaso, pois nesses jogos tinha as mesmas chances que qualquer outra pessoa. Na verdade Cardano levava alguma vantagem sobre seus adversários, pois já havia compreendido certos fatos sobre situações controladas pelo acaso. Em 1520 já havia economizado mais de 1000 coroas para pagar seus estudos, logo em seguida se matriculou no curso de medicina em Pavia. Mas talves umas das moiores heranças de Cardano para a matemática tenha sido seu livro *"O Livro dos Jogos de Azar"* , que apesar de conter varios erros influenciados pelo gênio forte e o vício em jogos de Cardano, foi o primeiro a usar a idéia de *Espaço Amostral*, hoje um dos conceitos básicos da *Teoria de Probabilidades*. Na linguagem moderna, a regra de Cardano é expressa da seguinta maneira:

Suponha que um processo aleatório tenha muitos resultados igualmente prováveis, alguns favoráveis (ou seja, ganhar), outros desfavoráveis (ou seja, perder). A probabilidade de obtermos um resultado favorável é igual à proporção entre os resultados favoráveis e o total de resultados possivéis. O conjunto de todos os resultados possivéis é chamado de Espaço Amostral ou de forma equivalente:

[1] A peste era formada por três doenças(veja 1)

Probabilidade de $A = \dfrac{\#A}{\#\Omega}$, onde $\#A$ = número de eventos favoráveis possíveis e $\#\Omega$ = número total de eventos possíveis.

Isso nos permite dizer, por exemplo, que para um dado não viciado a probabilidade de um lado aparecer em um lançamento é de $\dfrac{1}{6}$.

Na verdade principios básicos de probabilidade aparecem em nosso dia a dia, principalmente quando fazemos escolhas, seja ela na sentença dada por um júri no tribunal ou em jogos de azar, muitas das quais veremos são feitas de maneiras erradas por não compreendermos os sutis princípios probabilísticos envolvidos nessas ocasiões.

2 Casos de Justiça

Desrespeitamos um pouco a ordem cronológica dos fatos e falaremos agora sobre um caso de justiça no mínimo intrigante. Muitos com certeza já viram em filmes ou em séries de televisão o uso de exames de DNA em investigações criminais (principalmente os fãns da série CSI). Provavelmente a maioria das pessoas tem a idéia passada por esses filmes e séries de que esses exames são praticamente infalíveis. Em diversos tribunais por todo o mundo promotores e defensores usam argumento semelhante a este para convencer o juri presente da culpa ou inocência do réu, proferindo eloquentemente que a chance de que um desses exames esteja errado é de menos de uma em um milhão ou uma em um bilhão.

Um outro dado não muito divulgado nesses meios é a chance de erros serem cometidos cometidos na coleta e manuseio dessas amostras, que pode chegar a ser de uma em cem, o que bem menos que a taxa de erros nos exames. O Laboratório de Criminologia da Cidade da Filadélfia, por exemplo, admitiu ter trocado as amostras de referência do réu e da vítima num caso de estrupo e a companhia Cellmark Diagnostics (veja 6) confessou ter cometido erro semelhante.

Para continuarmos de forma mais eficiente essa discussão vamos fazer uso da seguinte lei de probabilidade:

Lei de Probabilidade 2.1: [2] Se um evento pode ter diferentes resultados possíveis A, B,C e assim por diante, a possibilidade de que A ou B ocorra e igual a somas das probabilidades individuais de A e B. Além disso a soma das probabilidades de todos os resultados possíveis é igual a 1.

[2] Os eventos aleatórios aos quais serão aplicados tal lei devem satisfazer algumas condições(veja 3, pág.119)

Usando essa Lei de Probabilidades podemos ver claramente que a chance de erro em alguma das etapas do exame de DNA seria dada por

$$\frac{1}{1.000.000.000} + \frac{1}{100} \simeq \frac{1}{100}.$$

Dadas as causas possíveis, portanto, deveríamos ignorar o testemunho mirabolante do especialista e nos concentrar na taxa de erros laboratoriais que é muito mais elevada - justamente a informação que os advogados são proíbidos de levar aos tribunais. Assim as tão repetidas falas sobre infalibilidade dos exames de DNA são exageradas, diga-se de passagem o histórico caso de Timothy Durham.

Em 31 de maio de 1991 uma menina de onze anos de idade foi violentamente estuprada e sodomizada à beira da piscina de sua residência em Tulsa, Oklahoma. Dois anos mais tarde, Timothy Durham foi injustamente acusado e condenado pelo crime. Os investigadores tinham apenas os cabelos e sêmen, provas inconclusivas encontradas na cena do crime e uma vaga descrição do atacante feita pela vítima . A investigação começou a concentrar-se em torno de Timothy Durham, um residente local com uma história de precedente criminal, que incluía armas de fogo e violação de condicional. No seu julgamento de 1993, os promotores apresentaram provas forenses que apontavam para Durham. Um analista testemunhou que ele havia comparado os cabelos da cena do crime com o cabelo Durham e encontrou características semelhantes que ele tinha visto em "menos de 5 %"das amostras de cabelo que ele tinha examinado. Não há suficientes dados empíricos sobre a freqüência de características diversas classes de cabelo humano. Por isso, é inválida para um analista caracterizar se a consistência é um evento raro ou comum. Durham foi condenado por múltiplas acusações de primeiro grau, incluindo estupro, sodomia forçada, e tentativa de roubo. Apesar do depoimento de onze testemunhas que disseram que Durham estava em uma competição de tiro ao alvo em Dallas, no momento do estupro, a acusação foi bem sucedida em convencer o júri da culpa de Durham. Sua pena total: mais de 3100 anos.

Em 1996, Durham contatou o Innocence Project(Projeto Inocência) e solicitou que um teste de DNA fosse realizado nas provas físicas que haviam sido descobertas na cena do crime. O teste revelou que o sêmen encontrado no maiô da vítima não poderia ter vindo de Durham. Esta revelação colocou a acusação da promotoria além do reino da plausibilidade e apontou a culpa de um estuprador condenado chamado Jess Garrison, que se mudou para Tulsa na sequência da sua liberdade condicional. Em dezembro de 1991, um mês depois que Durham foi acusado, Garrison foi encontrado enforcado em um armazém, o que acabou por ser considerado um suicídio.

3 O Problema de Monty Hall

Certamente a maioria de nós crescemos bem familiarizados com aqueles programas de televisão em que você tem portas ou maletas, as quais escondem prêmios, e onde pessoas precisam escolher em qual porta ou maleta estará o melhor prêmio. Veremos como programas de TV como esse já causaram grandes impactos no meio matemático.

Marylin Vos Savant, famosa colunista americana com um dos QI's mais altos do século XX, escreveu certa vez em sua coluna *Ask Marylin*, na revista *Parade*, a seguinte pergunta:

Suponha que um convidado está em um programa de televisão e deve escolher entre três portas, uma das quais esconde um automovel e as outras duas dois bodes. O convidado escolhe uma das portas. Em seguida, o apresentador, que sabe o que as portas escondem, escolhe uma das duas restantes mostrando um bode. Ele então pergunta ao convidado: você quer trocar de porta? O problema é: é vantajoso para o convidado fazê-lo? Se o fizer, qual a sua probabilidade de ganhar o automóvel?

Fig. 2: Marylin Vos Savant

A pergunta foi inspirada nas regras do programa norte americano de Tv *Let's Make a Deal*, transmitido entre 1963 e 1971, tendo como apresentador o simpático Monty Hall.

Não é dificil ver que temos duas portas onde se abrirmos uma, ganhamos, e se abrirmos outra, perdemos. Logo a chance de ganhar é de 50% em cada porta e, portanto, tanto faz qual porta escolhemos, certo? Errado! Milhares de pessoas também ficaram surpresas quando Marilyn afirmou em sua coluna que a melhor opção seria trocarmos de porta.

Marilyn recebeu cerca de 10 mil cartas de leitores sobre o assunto, sendo que aproximadamente 92% delas discordavam da opnião de Marylin. Não basta-se tão numerosa repressão a resposta de Marylin, algumas cartas haviam sido escritas por PhD's em Matemática. Um matemático da Universidade George Mason escreveu:

Fig. 3: Monty Hall

Deixe-me explicar: se mostramos que uma das portas não contém o prêmio, essa informção altera a probabilidade das duas escolhas recentes para $\frac{1}{2}$ *- e nenhuma das duas portas apresenta apresenta motivos para ter maior* *probabilidade que a outra. Como matemático profissional, estou muitop preucupado com a falta do conhecimento do publico matemático em geral. Por favor, ajudea melhorar essa situação confessando seu erro e sendo mais cuidadosa no futuro.*

Mal sabia ele, como ela estava ajudando a matemática. O matemático Paul Erdös, famoso pelo número de Erdös e também pela frase *"Um matemático é uma máquina para transformar café em teoremas"*, foi mais um a ficar irritado com a resposta de Marylin e mais irritado ainda ao receber de outro matemático uma demonstração formal de que Marylin estava certa.

E o mais incrível e que a solução desse problema não requer grandes conhecimentos matemáticos. Mais precisamente a principal ferramente será a Lei do Espaço Amostral(veja). Porém, requer um pensamento lógico cuidadoso.

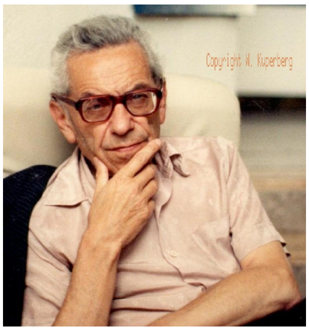

Fig. 4: Paul Ërdos

Estamos de frente para três portas: atrás de uma delas existe algo valioso, digamos um carro; atrás das outras duas, um item menos interessante, digamos uma camisa de uniforme do E.C. XV de Jaú. Escolhemos a porta número 1. O espaço amostral neste caso, é a lista dos três resultados possíveis:

- O carro está atrás da porta 1.
- O carro está atrás da porta 2.
- O carro está atrás da porta 3.

  Pela lei do espaço amostral, cada uma dessas possibilidades tem probabilidade de $\frac{1}{3}$ de ocorrer.

Aqui temos dois cenários:

1. Chute Certo: Escolhemos a porta que esconde o carro.
2. Chute Errado: escolhemos uma das portas com a camisa do E.C. XV de Jaú.

Vamos analisar separadamente cada um dos casos:

Chute Certo Neste cenário sabemos que a porta escolhida é a porta que esconde o carro. Ao apresentador abrir uma das portas que escondem uma camisa do E.C. XV de Jaú, caso façamos a troca iremos perder o carro que estava em nossa porta. Observe porém que temos $\frac{1}{3}$ de probabilidade de fazermos essa escolha certa.

Chute Errado Neste cenário sabemos que a porta escolhida é alguma das portas que escondem uma camisado E.C. XV de Jaú. Ao apresentador abrir a outra das portas que esconde uma camisa do E.C. XV de Jaú, caso façamos a troca estaremos trocando uma camisa do E.C. XV de Jaú por um belo carro. Observe porém que temos $\frac{2}{3}$ de probabilidade de escolhermos uma das portas erradas.

Pensando dessa forma sobre a situação, observamo que ao usarmos a estratégia de fazer a troca de portas temos $\frac{2}{3}$ de probabilidade de sairmos com o carro. Por outro lado, temos $\frac{1}{3}$ de probabilidade de perdermos o carro.

Assim podemos concluir que a menos que a estejamos amaldiçoados por algum praticante de magia negra, a melhor coisa que temos a fazer é trocar a nossa porta. Este problema nos fornesce um belo exemplo de como o publico matemático, em geral, comete vários erros ao lidar com problemas de aleatoriedade que surgem no dia a dia. Alguns outros problemas interessantes podem ser encontrados em 1.

Referências

[1] Mlodinow, L. *O Andar do Bêbado*. Editora Zahar, Rio de Janeiro, 2008.

[2] Wykes, A. *Doctor Cardano: Physician Extraordinary*. Frederick Muller, Londres, 1969.

[3] Morgado, A. e outros. *Análise Combinatória e Probabilidade* . IMPA, Rio de Janeiro, 2001.

[4] Vos Savant, M. *Aks Marilyn*. Parade, 9 de Setembro de 1990.

[5] Timothy Durham, *Innocence Project* . 18 de Março de 2011, on line em *http://www.innocenceproject.org/Content/Timothy_Durham.php*

[6] Cellmark Diagnostics. *Erro em Exame de DNA*. 18 de março de 2011, on line em *http://www.darwin.bio.uci.edu/ mueller/pdf/cellmark.pdf* .